

On the total curvature of minimizing geodesics on convex surfaces

Nina Lebedeva and Anton Petrunin

Abstract

We give a universal upper bound for the total curvature of minimizing geodesic on a convex surface in the Euclidean space.

1 Introduction

In this note we give an affirmative answer to the question asked by Dmitry Burago; later we found the same question in [1], [2] and [3]. Namely, we prove the following.

1.1. Main theorem. *The total curvature of a minimizing geodesic on a convex surface in \mathbb{R}^3 can not exceed 1000^{1000} .*

The value $2\cdot\pi$ is the optimal bound for the analogous problem in the plane. The total curvature of minimizing geodesic on a convex surface in \mathbb{R}^3 can exceed $2\cdot\pi$ and the optimal bound is expected to be slightly bigger than $2\cdot\pi$. The former example was constructed by Bárány, Kuperberg, and Zamfirescu in [3].

Let us list other related results.

- ◊ In [4], Liberman gives a bound on the total curvature of short geodesic on the surface of convex body K in terms of the ratio diameter and inradius of K . In the proof he use an analog of Lemma 3.1 discussed below.
- ◊ In [5], Usov gives the optimal bound for the total curvature of geodesics on the graphs of ℓ -Lipschitz convex function. Namely, he proves that if $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is ℓ -Lipschitz and convex then any geodesic in its graph

$$\Gamma_f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y) \}$$

has total curvature at most $2\cdot\ell$. An amusing generalization of Usov's result is given by Berg in [6].

- ◊ In [7], Pogorelov conjectured that the spherical image of geodesic on convex surface has to be (locally) rectifiable. It is easy to see that the length of spherical image of geodesic can not be smaller than its total curvature, so this conjecture (if it would be true) would be stronger than Liberman's theorem. Counterexamples to the different forms of this conjecture were found by Zalgaller in [8], Milka in [9] and Usov in [10]; these results were partly rediscovered later by Pach in [2].

1991 Mathematics Subject Classification. 53A05, 53C45, 53C22.
N. Lebedeva was partially supported by RFBR grant 14-01-00062.
A. Petrunin was partially supported by NSF grant DMS 1309340.

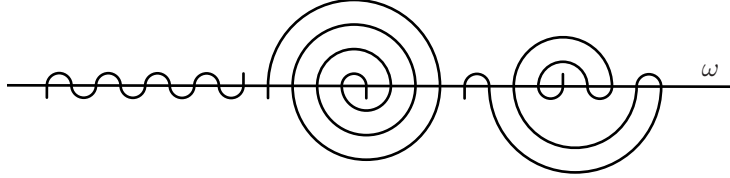
- ◊ In [3], Bárány, Kuperberg and Zamfirescu have constructed a corkscrew minimizing geodesic on a closed convex surface; that is a minimizing geodesic which twists around a given line arbitrary many times. They also rediscovered the results of Liberman and Usov mentioned above.

Idea of the proof. First we show that it is sufficient to estimate total curvature for the minimizing geodesics with almost constant velocity vector, say $\dot{\gamma}(t) \approx \mathbf{i}$.

To estimate total curvature in this case it is sufficient to estimate the integral

$$\int \langle \ddot{\gamma}(t), \mathbf{j} \rangle \cdot dt$$

for a vector $\mathbf{j} \perp \mathbf{i}$. To understand the idea of this estimate, imagine that the surface is lighten in the direction of \mathbf{j} , so it is divided into the dark and bright sides by a curve ω . On the diagram you see different combinatorics in which γ meets ω .



In the first case the total curvature is estimated by integral of Gauss curvature of the regions squeezed between γ and ω . The latter follows from the Tongue Lemma 4.2, which is the hart of our proof.

The second case might look impossible, but the corkscrew geodesic constructed in [3] can meets ω in this order. Here we calculate the total curvature for each twists and show that the obtained sequence of numbers grows geometrically from some place in the middle to the ends. At the ends the integral of the full twists can not be bigger than $2 \cdot \pi$ — this is enough to estimate the total curvature of the whole geodesic.

The last case is a mixture of first two and it is done by mixing both techniques.

2 Preliminaries

Total curvature. Recall that the *total curvature* of a curve $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$ (briefly $\text{TotCurv } \gamma$) is defined as supremum of sum of exterior angles for the polygonal lines inscribed in γ .

Note that for a polygonal line σ , its total curvature coincides with the sum of its exterior angles.

If γ is a smooth curve with unit-speed parametrization, then

$$\text{TotCurv } \gamma = \int_0^\ell \kappa(t) \cdot dt,$$

where $\kappa(t) = |\ddot{\gamma}(t)|$ is the curvature of γ at t .

2.1. Proposition. Assume $\gamma_n: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ is a sequence of curves converging pointwise to a curve $\gamma_\infty: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Then

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{TotCurv } \gamma_n \geq \text{TotCurv } \gamma_\infty.$$

Proof. Fix a polygonal line σ_∞ inscribed in γ_∞ . Let $\gamma_\infty(t_0), \dots, \gamma_\infty(t_k)$ be its vertices as they appear on γ_∞ . Consider the polygonal line σ_n inscribed in γ_n with the vertices $\gamma_n(t_0), \dots, \gamma_n(t_k)$. Note that

$$\text{TotCurv } \sigma_n \rightarrow \text{TotCurv } \sigma_\infty \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

By the definition of total curvature,

$$\text{TotCurv } \sigma_n \leq \text{TotCurv } \gamma_n.$$

The statement follows since the broken line σ_∞ can be chosen in such a way that $\text{TotCurv } \sigma_\infty$ is arbitrary close to $\text{TotCurv } \gamma_\infty$. \square

Convergence of sets. Given a closed set $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, denote by dist_Σ the distance function from Σ ; that is

$$\text{dist}_\Sigma x = \inf \{ |x - y| \mid y \in \Sigma \}.$$

We say that a sequence of closed sets $\Sigma_n \subset \mathbb{R}^3$ *converges* to the closed set $\Sigma_\infty \subset \mathbb{R}^3$ if for any $x \in \mathbb{R}^3$, we have $\text{dist}_{\Sigma_n} x \rightarrow \text{dist}_{\Sigma_\infty} x$ as $n \rightarrow \infty$.

Convex surfaces. By *convex surface* Σ in the Euclidean 3-space \mathbb{R}^3 we understand the boundary of a closed convex set K with nonempty interior. If K is compact we say that the Σ is *closed*.

Assume Σ is smooth. If at every point both of Σ the principle curvatures are positive, we say that Σ is *strongly convex*.

2.2. Proposition. Assume Σ_n be a sequence of convex surfaces which converge to a convex surface Σ_∞ . Then for any minimizing geodesic γ_∞ in Σ_∞ there is a sequence of minimizing geodesics γ_n in Σ_n which pointwise converge to γ_∞ as $n \rightarrow \infty$.

Proof. Assume $\gamma_\infty: [0, \ell] \rightarrow \Sigma_\infty$ is parametrized by its arc-length.

Fix a sub-interval $[a, b] \subset (0, \ell)$. Set $p_\infty = \gamma_\infty(a)$ and $q_\infty = \gamma_\infty(b)$. Let $p_n, q_n \in \Sigma_n$ be a two sequences of points which converge to p_∞ and q_∞ correspondingly.

Denote by γ_n a minimizing geodesic from p_n to q_n in Σ_n . Note that γ_n converges to $\gamma_\infty|_{[a, b]}$ as $n \rightarrow \infty$.

Taking the sub-interval $[a, b]$ closer and closer to $[0, \ell]$ and applying diagonal procedure, we get the result. \square

3 Liberman's lemma

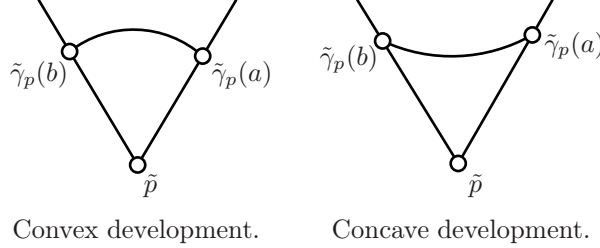
In this section we give a slight generalization of the construction given by Liberman in [4]; see also [11] and [12].

Development. Let $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a curve parametrized by arc-length and a point p does not lie on γ .

Assume $\tilde{\gamma}_p: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ is a plane curve parametrized by arc-length and \tilde{p} is a point in the plane such that

$$|\tilde{p} - \tilde{\gamma}(t)| = |p - \gamma(t)|$$

for any $t \in [0, \ell]$. Moreover, the direction from \tilde{p} to $\tilde{\gamma}(t)$ changes monotonically (clockwise or counterclockwise). Then $\tilde{\gamma}_p$ is called *development* of γ with respect to p .



We say that the development $\tilde{\gamma}_p$ is *convex* (*concave*) in the interval $[a, b]$ if the arc $\tilde{\gamma}_p|_{[a, b]}$ cuts from the solid angle $\angle \tilde{p}_{\tilde{\gamma}_p(a)}^{\tilde{\gamma}_p(b)}$ convex bounded (correspondingly unbounded) domain.

We say that $\tilde{\gamma}_p$ is *locally convex* (*concave*) in the interval $[a, b]$ if any point $x \in [a, b]$ admits a closed neighborhood $[a', b']$ in $[a, b]$ such that $\tilde{\gamma}_p$ is convex (correspondingly concave) in the interval $[a', b']$.

If we pass to the limit of this construction as p moves to infinity along a half-line in the direction of a unit vector $-\mathbf{u}$ then the limit curve is called development of γ in the direction \mathbf{u} and denoted as $\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}$.

We can define the development $\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}$ directly: (1) the development $\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ is parametrized by arc-length, (2) for a fixed unit vector $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$, we have

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}(t) \rangle = \langle \mathbf{u}, \gamma(t) \rangle$$

for any $t \in [0, \ell]$ and (3) the projection of $\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}(t)$ to the line normal to $\tilde{\mathbf{u}}$ is monotonic in t .

We can assume that $\tilde{\mathbf{u}}$ is the vertical vector in the coordinate plane. In this case we say that $\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}$ is concave (convex) in the interval $[a, b]$ if the lune bounded by arc $\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}|_{[a, b]}$ and the segment $[\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}(a)\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}(b)]$ is convex and lies above (correspondingly below) the line segment $[\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}(a)\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}(b)]$.

Dark and bright sides. Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a convex surface, $p \in \Sigma$ and $z \neq p$.

We say that p lies on the *dark* (*bright*) side of Σ with from z if non of the points $p + t \cdot (p - z)$ lie inside of Σ for $t > 0$ (correspondingly for $t < 0$). The intersection of dark and bright side is called horizon of z ; it is denoted by ω_z .

Note that if z lies inside Σ then all the points on Σ lie on the dark side from z and its horizon ω_z is empty.

If Σ is smooth we can define the outer normal vector ν_p to Σ at p . In this case p lies on dark (bright) side of Σ from z if and only if $\langle p - z, \nu_p \rangle \geq 0$ (correspondingly $\langle p - z, \nu_p \rangle \leq 0$). If in addition Σ is closed and strongly convex then the horizon is empty for z inside Σ and it is formed by a closed smooth curve for z outside Σ .

We could also define bright/dark sides and horizon in the limit case, as p escapes to infinity along a half-line in direction $-\mathbf{u}$.

The latter can be defined directly. We say that a point $p \in \Sigma$ lies on dark (bright) side for the unit vector \mathbf{u} if non of the points $p + \mathbf{u} \cdot t$ lie inside of Σ for $t > 0$, (correspondingly $t < 0$). As before the intersection of bright and dark side is called horizon of \mathbf{u} and it is denoted as $\omega_{\mathbf{u}}$.

In the smooth case the latter means that $\langle \nu_p, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ (correspondingly $\langle \nu_p, \mathbf{u} \rangle \leq 0$). If in addition Σ is closed strongly convex then $\omega_{\mathbf{u}}$ is a closed smooth curve.

3.1. Liberman's Lemma. *Assume γ be a geodesic on the convex surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Then for any point $z \notin \Sigma$ the development $\tilde{\gamma}_z$ is locally convex (locally concave) if γ lies on dark (correspondingly bright) side of Σ from z .*

Similarly for any unit vector \mathbf{u} , the development $\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}$ is locally convex (locally concave) if γ lies on dark (correspondingly bright) side of Σ for \mathbf{u} .

Note that for any space curve γ and any unit vector \mathbf{u} we have

$$\text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{u}} \leq \text{TotCurv } \gamma.$$

On the other hand total curvature of few developments gives an estimate for the total curvature of the original curve. For example, if $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ is the orthonormal basis then

$$\text{TotCurv } \gamma \leq \text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{i}} + \text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{j}} + \text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{k}}.$$

If γ lies completely on the dark (or bright) side for direction \mathbf{u} then by Liberman's lemma we get

$$\text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{u}} \leq \pi.$$

It follows that if γ cross the horizons $\omega_{\mathbf{i}}, \omega_{\mathbf{j}}$ and $\omega_{\mathbf{k}}$ at most N times then

$$\begin{aligned} \text{TotCurv } \gamma &\leq \text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{i}} + \text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{j}} + \text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{k}} \leq \\ &\leq (N+1) \cdot \pi. \end{aligned}$$

Therefore, to violate Main Theorem γ has to cross the horizons $\omega_{\mathbf{i}}, \omega_{\mathbf{j}}$ and $\omega_{\mathbf{k}}$ huge number of times.

4 Curvature of development

Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a closed smooth strongly convex surface and $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ be a unit-speed geodesic. Assume that for some unit vector \mathbf{u} , the geodesic γ cross the horizon $\omega_{\mathbf{u}}$ transversely at $t_0 < \dots < t_k$. Set $\alpha_i = \angle(\dot{\gamma}(t_i), \mathbf{u}) - \frac{\pi}{2}$ for each i . Note that $|\alpha_i| \leq \frac{\pi}{2}$.

The values t_i and α_i will be called correspondingly *meeting moments* and *meeting angles* of the geodesic γ with the horizon $\omega_{\mathbf{u}}$.

Let us introduce new notation

$$\text{TotCurv}_{\mathbf{u}} \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}.$$

From Liberman's lemma 3.1, we get the following.

4.1. Corollary. *Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a strongly convex smooth surface, $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ be a unit-speed geodesic and \mathbf{u} is a unit vector. Assume that γ cross the horizon $\omega_{\mathbf{u}}$ transversely and $t_0 < \dots < t_k$ be its meeting moments and $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ be its meeting angles with the horizon $\omega_{\mathbf{u}}$. Then*

$$\text{TotCurv}_{\mathbf{u}} \gamma \leq 3 \cdot \pi + 2 \cdot |\alpha_0 - \alpha_1 + \dots + (-1)^k \cdot \alpha_k|.$$

As you will see further, in order to find the needed estimate the total curvature of geodesic we will get an upper bound for the sum

$$|\alpha_0 - \alpha_1 + \dots + (-1)^k \cdot \alpha_k|.$$

Finding such an upper bound is the most important ingredient in the proof of the Main Theorem.

Proof. By Liberman's lemma,

$$\text{TotCurv}_{\mathbf{u}}(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}) = \pm(\alpha_{i-1} - \alpha_i)$$

where the sign is “+” if $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ lies on the dark side and “−” if it lies on the bright side from \mathbf{u} . Summing all this up we get

$$\text{TotCurv}_{\mathbf{u}}(\gamma|_{[t_0, t_k]}) = |\alpha_0 - 2 \cdot \alpha_1 + \dots + (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot \alpha_{k-1} + (-1)^k \cdot \alpha_k|.$$

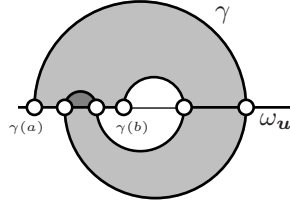
By Liberman's lemma we also have

$$\text{TotCurv}_{\mathbf{u}}(\gamma|_{[0, t_0]}), \text{TotCurv}_{\mathbf{u}}(\gamma|_{[t_k, \ell]}) \leq \pi$$

Since $\alpha_0, \alpha_k \leq \frac{\pi}{2}$, the statement follows. \square

If Σ is a surface in \mathbb{R}^3 and $p \in \Sigma$ we denote by K_p the Gauss curvature of Σ at p .

Assume a, b be the meeting moments of minimizing geodesic γ with $\omega_{\mathbf{u}}$. The arc $\gamma|_{[a, b]}$ will be called $\omega_{\mathbf{u}}$ -tongue if there is an immersed disc $\iota: \mathbb{D} \rightarrow \Sigma$ such that the closed curve $\iota|_{\partial \mathbb{D}}$ is formed by joint of the arc $\gamma|_{[a, b]}$ and an arc of $\omega_{\mathbf{u}}$. In this case the immersion ι is called the *disc of the tongue*.



4.2. Tongue Lemma. *Let \mathbf{u} be a unit vector, $\gamma: [a, b] \rightarrow \Sigma$ be a minimizing geodesic and $\omega_{\mathbf{u}}$ -tongue on the strongly convex surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ and $\iota: \mathbb{D} \rightarrow \Sigma$ be its disc.*

Then

$$\int_{\mathbb{D}} K_{\iota(x)} \cdot d_{\iota(x)} \text{ area}_{\Sigma}$$

takes one of the value

$$\alpha - \beta, -\alpha + \beta, \pi - \alpha - \beta, \pi + \alpha + \beta \pmod{2 \cdot \pi}.$$

In particular

$$|\alpha - \beta| \leq \int_{\mathbb{D}} K_{\iota(x)} \cdot d_{\iota(x)} \text{ area}_{\Sigma}.$$

❶

If in addition the image $\iota(\mathbb{D})$ lies completely in the dark or bright side for \mathbf{u} then

$$\text{TotCurv } \gamma \leq \int_{\iota(\mathbb{D})} K_p \cdot d_p \text{ area}_\Sigma. \quad \textcircled{2}$$

Proof. Since γ is a geodesic, the parallel translation along γ sends $\dot{\gamma}(a)$ to $\dot{\gamma}(b)$.

Note also that \mathbf{u} belongs to the tangent plane to Σ at any point on the horizon $\omega_{\mathbf{u}}$; in particular the \mathbf{u} extends to a parallel tangent vector field on $\omega_{\mathbf{u}}$.

It follows that parallel translation along $\iota|_{\partial\mathbb{D}}$ rotates the tangent plane by angle

$$\pm(\frac{\pi}{2} + \alpha) \pm (\frac{\pi}{2} + \beta)$$

To prove the main statement of the lemma, it remains to apply Gauss–Bonnet formula.

Denote by R the right hand side in $\textcircled{1}$. Note that $R \geq 0$ and $|\alpha|, |\beta| \leq \frac{\pi}{2}$. From the main statement of the lemma it follows then that the minimal possible value for R is $|\alpha - \beta|$.

To prove $\textcircled{2}$, note that in this case ι is an embedding. Further note that the spherical image of the dark side of Σ is hemisphere. Therefore $2 \cdot \pi$ is the integral of Gauss curvature along the dark side. It follows that

$$\int_{\mathbb{D}} K_{\iota(x)} \cdot d_{\iota(x)} \text{ area}_\Sigma = \int_{\iota(\mathbb{D})} K_p \cdot d_p \text{ area}_\Sigma < 2 \cdot \pi.$$

By Liberman’s lemma the statement follows. \square

5 Almost straight arcs

Let $\varepsilon > 0$. A curve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ will be called ε -straight if

$$(1 - \varepsilon) \cdot \text{length } \gamma \leq |\gamma(b) - \gamma(a)|.$$

5.1. Lemma. *Assume $\varepsilon > 0$ and n is a positive integer such that $n \cdot \varepsilon > 2$. Then any minimizing geodesic on a convex surface Σ in \mathbb{R}^3 can be subdivided into ε -straight arcs $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.*

Proof. Let $\vartheta \in (0, \pi)$ be such that

$$1 - \cos \vartheta = \varepsilon.$$

Assume two points p and q lie on the convex surface Σ . Denote by ν_p and ν_q the outer normal vectors at p and q correspondingly. Note that if

$$\angle(\nu_p, \nu_q) \leq 2 \cdot \vartheta,$$

then any minimizing geodesic from p to q on Σ is ε -straight.

Let $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ be a minimizing geodesic parametrized by its arc-length.

Assume $\gamma_{[t, \ell]}$ is not ε -straight. Set t' to be the maximal value in $[t, \ell]$ such that the interval $[t, t']$ is ε -straight. Consider a sequence $0 = t_0 < t_1 < \dots <$

$t_n < \ell$ such that $t_{i+1} = t'_i$ for each i . Denote by ν_i the outer unit normal vector to Σ at $\gamma(t_i)$. From above we get

$$\angle(\nu_i, \nu_j) \geq 2 \cdot \vartheta$$

for all $i \neq j$. In other words, the open balls $B_\vartheta(\nu_i)$ do not overlap in \mathbb{S}^2 .

It remains to note that

$$\text{area}[B_\vartheta(\nu_i)] = 2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \quad \text{and} \quad \text{area} \mathbb{S}^2 = 4 \cdot \pi.$$

Hence the result follows. \square

5.2. Corollary. *Assume $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ is a unit-speed minimizing geodesic on the convex surface Σ in \mathbb{R}^3 . Then $\text{diam } \gamma \geq \frac{\ell}{10}$.*

Proof. Apply Lemma 5.1 for $\varepsilon = \frac{1}{2}$. \square

6 An arc in almost constant direction

6.1. Proposition. *For any $\varepsilon > 0$ there is $\delta > 0$ such that the following holds.*

If $\gamma: [a, b] \rightarrow \Sigma$ is a minimizing geodesic on a smooth strongly convex surface Σ in \mathbb{R}^3 then there is an interval $[a', b'] \subset [a, b]$ such that

$$\text{TotCurv}(\gamma|_{[a', b']}) > \delta \cdot \text{TotCurv } \gamma.$$

and

$$\angle(\dot{\gamma}(t), \mathbf{u}) < \varepsilon$$

for a fixed unit vector \mathbf{u} and any $t \in [a', b']$.

Moreover, if $\varepsilon = \frac{1}{10}$ then one can assume $\delta = \frac{1}{100^{100}}$.

In the proof we will need the following two lemmas.

6.2. Lemma. *For any ε there is $\delta > 0$ such that the following holds.*

Assume γ is a curve, \mathbf{v}_1 and \mathbf{v}_2 be two vectors in \mathbb{R}^3 and $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq \pi$ be such that

$$\begin{aligned} \varepsilon &< \angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) < \pi - \varepsilon \\ \alpha_i - \delta &< \angle(\mathbf{v}_i, \dot{\gamma}(t)) < \alpha_i + \delta \end{aligned}$$

then there is a vector \mathbf{u} such that $\angle(\mathbf{u}, \dot{\gamma}(t)) < \varepsilon$.

Moreover if $\varepsilon < \frac{1}{10}$ then one can take $\delta = \varepsilon^{10}$.

The proof of the lemma above is straightforward computation; we omit it.

6.3. Lemma. *For any $\varepsilon > 0$ there is $\delta > 0$ such that the following holds.*

Let $\gamma: [a, b] \rightarrow \Sigma$ be an δ -straight minimizing geodesic on a smooth strongly convex surface Σ in \mathbb{R}^3 . Set $\mathbf{v}_\gamma = \gamma(b) - \gamma(a)$. Then there is a sub-interval $[a', b']$ in $[a, b]$ such that

$$\text{TotCurv}(\gamma|_{[a', b']}) \geq \delta \cdot \text{TotCurv } \gamma.$$

and

$$\alpha - \varepsilon \leq \angle(\dot{\gamma}(t), \mathbf{v}_\gamma) \leq \alpha + \varepsilon$$

for some fixed α and any $t \in [a', b']$.

Moreover if $\varepsilon < \frac{1}{10}$ one can take $\delta = \varepsilon^{10}$.

Proof. Without loss of generality we can assume that $a = 0$, $b = 2$ and

$$\text{TotCurv}(\gamma|_{[1,2]}) \geq \frac{1}{2} \cdot \text{TotCurv } \gamma.$$

Set $p = \gamma(0)$. Let $\vartheta \in (0, \pi)$ be such that $1 - \cos \vartheta = \delta$. Note that

$$\angle(\mathbf{v}_\gamma, \gamma(t) - p) \leq \angle(\tilde{\gamma}_p(1) - \tilde{p}, \tilde{\gamma}_p(2) - \tilde{p}) < \vartheta \quad \textcircled{1}$$

for any $t \geq 1$.

By Liberman's lemma

$$\text{TotCurv}_p(\gamma|_{[1,2]}) < \pi + \vartheta.$$

Assume $N = \lceil \frac{\pi}{\vartheta} + 1 \rceil$. Then we can subdivide $\gamma|_{[1,2]}$ into N arcs $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ such that

$$\text{TotCurv}_p(\gamma_n) \leq \vartheta \quad \textcircled{2}$$

for each n .

From $\textcircled{1}$ and $\textcircled{2}$, it follows that for each n , there is α_n such that

$$\alpha_n - \vartheta \leq \angle(\dot{\gamma}_n(t), \mathbf{v}_\gamma) \leq \alpha_n + \vartheta.$$

The arc γ_n with the maximal total curvature will solve the proposition.

It remains to choose δ so that $\vartheta(\delta) < \frac{\varepsilon}{100}$. \square

Proof of Proposition 6.1. Set $\gamma_0 = \gamma$.

Fix $\delta > 0$, set $n = \lceil \frac{2}{\delta} \rceil$. By Lemma 5.1, the geodesic γ_0 can be subdivided into n arcs which are δ -straight. Let us choose the arc γ'_0 with the maximal total curvature. Assuming $\delta < \frac{1}{10}$ we get

$$\text{TotCurv } \gamma'_0 \geq \frac{\delta}{10} \cdot \text{TotCurv } \gamma_0.$$

Let α_1 be the angle and γ_1 be the arc in γ'_0 provided by Lemma 6.3. In particular

$$\begin{aligned} \text{TotCurv } \gamma_1 &\geq \delta \cdot \text{TotCurv } \gamma'_0 \geq \\ &\geq \frac{\delta^2}{10} \cdot \text{TotCurv } \gamma_0. \end{aligned}$$

If $\alpha_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ or $\alpha_1 \geq \pi - \frac{\varepsilon}{2}$ and δ is small enough then statement holds for the arc γ_1 and the vector $\mathbf{u} = \pm \mathbf{v}_{\gamma'_0}$.

Otherwise let us repeat the above construction for γ_1 . Namely, apply Lemma 5.1 to the geodesic γ_1 and denote by γ'_1 the δ -straight arc with maximal total curvature. If δ is small, we get

$$\frac{\varepsilon}{3} < \angle(\mathbf{v}_{\gamma'_1}, \mathbf{v}_{\gamma'_0}) < \pi - \frac{\varepsilon}{3} \quad \textcircled{3}$$

Again, we get

$$\text{TotCurv } \gamma'_1 \geq \frac{\delta}{10} \cdot \text{TotCurv } \gamma_1 \geq \frac{\delta^3}{100} \cdot \text{TotCurv } \gamma_0.$$

Further apply Lemma 6.3 to γ'_1 . Denote by γ_2 and α_2 the angle and the sub-arc of γ'_1 . Again

$$\text{TotCurv } \gamma_2 \geq \frac{\delta^4}{100} \cdot \text{TotCurv } \gamma_0.$$

The curve γ_2 runs under nearly constant angle to $\mathbf{v}_{\gamma'_0}$ and $\mathbf{v}_{\gamma'_1}$. The inequality ③ makes possible to apply Lemma 6.2. Hence the main statement in the proposition follows.

Straightforward computations prove the last statement. \square

7 Drifting geodesics

In this section we fix notations which will be used further without additional explanation.

Fix a (x, y, z) -coordinates on the Euclidean space; denote by $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ the standard basis.

A plane parallel to say (y, z) -coordinate plane will be called (y, z) -plane.

7.1. Definition. A smooth curve $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$ is called \mathbf{i} -drifting if both ends $\gamma(0)$ and $\gamma(\ell)$ lie on the x -axis and $\angle(\dot{\gamma}(t), \mathbf{i}) < \frac{1}{10}$ for all t .

(λ, μ, ν) -frame. Let Σ be a convex surface and $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ be an \mathbf{i} -drifting minimizing geodesic with unit-speed parametrization.

Given $t \in [0, \ell]$, consider the oriented orthonormal frame $\lambda(t), \mu(t), \nu(t)$ such that $\nu(t)$ is the outer normal to Σ at $\gamma(t)$, the vector $\mu(t)$ lies in (y, z) -plane and therefore the vector $\lambda(t)$ lies in the plane spanned by $\nu(t)$ and the x -axis. We assume in addition that $\langle \lambda, \mathbf{i} \rangle \geq 0$.

Since $\langle \dot{\gamma}(t), \mathbf{i} \rangle > 0$, we have $\nu(t) \neq \mathbf{i}$. Therefore the frame (λ, μ, ν) is uniquely defined for any $t \in [0, \ell]$.

Angle functions. Set

$$\varphi(t) = \angle(\mathbf{i}, \dot{\gamma}(t)), \quad \psi(t) = \frac{\pi}{2} - \angle(\mathbf{i}, \nu(t)), \quad \vartheta(t) = \frac{\pi}{2} - \angle(\mu(t), \dot{\gamma}(t)),$$

From the above definitions it follows that $|\vartheta(t)|, |\psi(t)| \leq \frac{\pi}{2}$ and for each t there is a right spherical triangle with legs $|\vartheta(t)|, |\psi(t)|$ and hypotenuse $\varphi(t)$. In particular $\cos \vartheta \cdot \cos \psi = \cos \varphi$. Whence we get the following.

7.2. Claim. For any t we have

$$\varphi(t) \geq |\psi(t)| \quad \text{and} \quad \varphi(t) \geq |\vartheta(t)|$$

Applying Liberman's Lemma in the direction \mathbf{i} we also get the following.

7.3. Claim. If an arc $\gamma|_{[a, b]}$ lies in the dark (bright) side for \mathbf{i} then the angle function φ is non-decreasing (correspondingly non-increasing) in $[a, b]$.

8 Plane sections

Assume γ is a curve on a smooth strongly convex surface Σ in \mathbb{R}^3 . Consider a plane L passing through two points of γ , say $p = \gamma(a)$ and $q = \gamma(b)$ with $a < b$. Let L_{\pm} be a half-planes in L bounded by the line through p and q . Set $\sigma_{\pm} = \Sigma \cap L_{\pm}$.

8.1. Observation. *If γ is a minimizing geodesic in the smooth strongly convex surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ and a, b and σ_{\pm} as above then*

$$\text{length } \sigma_{\pm} \geq \text{length}(\gamma|_{[a,b]}).$$

To prove the observation, it is sufficient to note that σ_{\pm} are smooth convex plane curve connecting p to q in Σ .

Based on this observation we give couple of estimates on drifting minimizing geodesics.

Let $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a curve and ℓ be a line which does not pass through points of γ . Assume $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous azimuth angle of γ in the cylindrical coordinates with the axis ℓ . If

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \geq 2 \cdot n \cdot \pi,$$

we will say that γ goes around the line ℓ at least n times.

8.2. Proposition. *Assume $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ is an \mathbf{i} -drifting minimizing geodesic in the convex surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, a sub-segment $[a, b] \subset [0, \ell]$ and the following conditions hold*

- (i) *The points $\gamma(a)$ and $\gamma(b)$ lie in a half-plane with boundary line formed by the x -axis and the arc $\gamma|_{[a,b]}$ goes around the x -axis at least once.*
- (ii) *The x -coordinate of $\gamma(a)$ is larger than the x -coordinate of $\frac{1}{2} \cdot (\gamma(0) + \gamma(\ell))$. Then $\gamma(b)$ lies on the dark side for \mathbf{i} .*

Proof. Let us apply Observation 8.1 to the plane containing x -axis, $\gamma(a)$ and $\gamma(b)$.

We can assume that $\gamma(0)$ is the origin of the (x, y, z) -coordinate system and both points $p = \gamma(a)$ and $q = \gamma(b)$ lie in the (x, z) -coordinate half-plane with $x \geq 0$, denoted by Π . We can assume that $\sigma_+ \subset \Pi$. Let $(x_p, 0, z_p)$ and $(x_q, 0, z_q)$ be the coordinates of p and q .

From the assumptions we get $x_p < x_q < 2 \cdot x_p$.

Assume contrary, then $\gamma(b)$ lies on the bright side for \mathbf{i} . Then from convexity of the curve $\Pi \cap \Sigma$ we get

$$\text{length } \sigma_+ \leq \sqrt{(x_q - x_p)^2 + z_p^2}.$$

On the other hand, since $\gamma|_{[a,b]}$ goes around x -axis at least once, we get

$$\text{length } \gamma|_{[a,b]} \geq \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (z_p + z_q)^2}.$$

These two estimates contradict Observation 8.1. □

8.3. Corollary. *If Σ, γ, ℓ, a and b as in the Proposition 8.2 and the arc $\gamma|_{[a,b]}$ goes around the x -axis at least twice then the arc $\gamma|_{[b,\ell]}$ lies on the dark side with respect to \mathbf{i} .*

Proof. Fix $b' \in [b, \ell]$. Note that one can find $a' \in [a, b]$ such that the assumptions of Proposition 8.2 hold for the interval $[a', b']$. Applying the proposition we get the result. \square

8.4. Proposition. *Assume $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ is an \mathbf{i} -drifting minimizing geodesic in the convex surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Assume that the arc $\gamma|_{[b, \ell]}$ lies on the dark side of Σ with respect to \mathbf{i} . If $b \leq s < t \leq \ell$ and the point $\gamma(s)$ lies in the plane Π through $\gamma(t)$ spanned by $\nu(t)$ and $\lambda(t)$ then*

$$\varphi(s) \leq \psi(t).$$

Proof. Let us apply Observation 8.1 to the plane Π and $p = \gamma(s)$ and $q = \gamma(t)$.

Let x_p and x_q be the x -coordinates of p and q .

Since $\gamma|_{[s, t]}$ lies in the dark side, its Liberman's development $\tilde{\gamma}|_{[s, t]}$ with respect to \mathbf{i} is concave. In particular

$$\text{length}(\gamma|_{[s, t]}) = \text{length}(\tilde{\gamma}|_{[s, t]}) \geq \frac{x_q - x_p}{\cos \varphi(s)}.$$

On the other hand, convexity of σ_+ imply that

$$\text{length } \sigma_+ \leq \frac{x_q - x_p}{\cos \psi(t)}.$$

It remains to apply Observation 8.1. \square

9 s -pairs

Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a strongly convex surface and $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ be an \mathbf{i} -drifting minimizing geodesic.

Assume that γ intersects the horizon ω_j transversely.

Let $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ be the meeting moments of γ with ω_j . Set

$$\varphi_n = \varphi(t_n) \quad \psi_n = \psi(t_n) \quad \vartheta_n = \vartheta(t_n).$$

Note that $\vartheta_n = \pm \alpha_n$ so we can say $s_n \cdot \vartheta_n = (-1)^m \cdot \alpha_n$ for some sequence of signs $s_i = \pm 1$. In particular

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \dots + (-1)^k \cdot \alpha_k = s_0 \cdot \vartheta_0 + s_1 \cdot \vartheta_1 + \dots + s_k \cdot \vartheta_k.$$

Note that for the right choice of orientation, if $s_n = +1$ then $\nu_{\gamma(t)}$ moves clockwise in \mathbb{S}^2 at t_n and if $s_n = -1$ then it moves counterclockwise.

We say that a pair of indexes $i < j$ forms an s -pair if

$$\sum_{n=i}^j s_n = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{n=i}^{j'} s_n > 0$$

if $i < j' < j$.

If you exchange “+1” and “-1” in s by “(” and “)” correspondingly then (i, j) is an s -pair if and only if the i -th bracket forms a pair with j -bracket.

Note that any index i appears in at most one s -pair and for any s -pair (i, j) we have

- ◇ $s_i = 1$; that is, i -th bracket has to be opening.
- ◇ $s_j = -1$; that is, j -th bracket has to be closing.

In particular,

$$\begin{aligned} s_i \cdot \vartheta_i + s_j \cdot \vartheta_j &= \vartheta_i - \vartheta_j = \\ &= (-1)^i \cdot \alpha_i + (-1)^j \cdot \alpha_j. \end{aligned}$$

Tongue interpretation. Assume (i, j) is an s -pair. Note that in this case there is an arc of ω_j from $\gamma(t_i)$ to $\gamma(t_j)$ with monotonic x -coordinate. Moreover a disc of the tone has this arc in the boundary.

The proof can be guessed from the diagram. It shows a lift of γ in the universal cover of strip of Σ between (y, z) -planes containing $\gamma|_{[t_i, t_j]}$; the solid horizontal lines correspond are lifts of ω_j .

We say that q is the depth of an s -pair (i, j) (briefly $q = \text{depth}_s(i, j)$) if q is the maximal number such that there is q -long nested sequence of s -pairs starting with (i, j) . For example the s -pair on the diagram has depth 5.

More precisely, the depth of (i, j) is the maximal number q for which there is a sequence of s -pairs $(i, j) = (i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_q, j_q)$ such that

$$i = i_1 < \dots < i_q < j_q < \dots < j_1 = j.$$

Note that the s -pairs of the same depth do not overlap; that is if $\text{depth}(i, j) = \text{depth}(i', j')$ for two distinct s -pairs (i, j) and (i', j') then either $i < j < i' < j'$ or $i' < j' < i < j$.

The following proposition follow directly from the discussion above.

9.1. Proposition. *Let (i, j) be an s -pair. Then the arcs $\gamma|_{[t_i, t_j]}$ and an arc of ω_j bound an immersed disc in Σ which lies between (y, z) -planes through $\gamma(t_i)$ and $\gamma(t_j)$. Moreover the maximal multiplicity of the disc is at most $\text{depth}_s(i, j)$.*

9.2. Corollary. *Let us denote by S_q the subset of indexes $\{1, \dots, k\}$ which are the parts of s -pairs with depth q . Then*

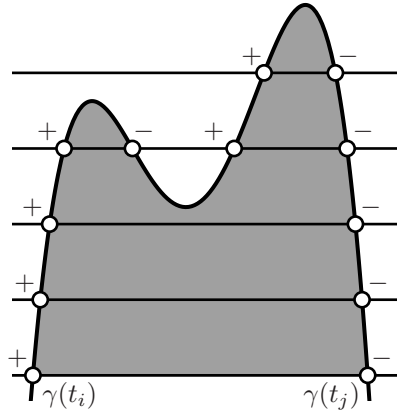
$$\left| \sum_{n \in S_q} (-1)^n \cdot \alpha_n \right| = \left| \sum_{n \in S_q} s_n \cdot \vartheta_n \right| \leq 4 \cdot \pi \cdot q.$$

Proof. For each n denote by K_n the integral of Gauss curvature of the part of surface Σ with the x -coordinate less then the x -coordinate of $\gamma(t_n)$. Note that

$$0 \leq K_1 \leq \dots \leq K_k \leq 4 \cdot \pi.$$

By Proposition 9.1 and the Tongue Lemma, we get

$$s_i \cdot \vartheta_i + s_j \cdot \vartheta_j = \vartheta_i - \vartheta_j \leq q \cdot (K_j - K_i)$$



The statement follows since the s -pairs with the same depth do not overlap. \square

9.3. Corollary. *Assume*

$$q = \max_{1 \leq i < j \leq k} \left\{ \left| \sum_{n=i}^j s_n \right| \right\}$$

Then

$$\left| \sum_{n=1}^k s_n \cdot \vartheta_n \right| \leq 2 \cdot q \cdot \left(q + \frac{3}{2}\right) \cdot \pi.$$

Proof. Denote by S the set of all indexes which appear in some s -pair.

Note that depth of any s -pair is at most q . That is,

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_q.$$

By Corollary 9.2,

$$\left| \sum_{n \in S} s_n \cdot \vartheta_n \right| \leq 2 \cdot q \cdot (q + 1) \cdot \pi. \quad \bullet$$

Set $R = \{1, \dots, k\} \setminus S$; this is the set of indexes which do not appear in an s -pair.

Given r , set $i \in Q_r$ if

$$\sum_{n=1}^i s_n = r.$$

Note that $Q_r \neq \emptyset$ for at most q values of r and in each set Q_r there are at most 2 indexes which do not appear in an s -pair; that is $Q_r \cap R$ has at most two indexes for each r .

Since $|a_n| < \frac{\pi}{2}$, we get

$$\left| \sum_{n \in R} s_n \cdot \vartheta_n \right| \leq q \cdot \pi.$$

The latter inequality together with \bullet implies the statement in the corollary. \square

10 Geometric growth

10.1. Claim. *Assume $\psi(t) > \varepsilon$ for $t \in [t_i, t_{i+1}]$ and $s_i = s_{i+1}$. Then*

$$|\vartheta_{i+1} - \vartheta_i| > \pi \cdot \sin \varepsilon.$$

Proof. Note that the arc $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ is a tongue with embedded disc $\iota: \mathbb{D}^2 \rightarrow \Sigma$. Since $\psi(t) > \varepsilon$, the spherical image $\nu \circ \iota(\mathbb{D}^2)$ of $\iota(\mathbb{D}^2)$ lies in a half-disc of radius $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ in \mathbb{S}^2 . Note that

$$K(\iota(\mathbb{D}^2)) = \text{area}(\nu \circ \iota(\mathbb{D}^2)) < \pi \cdot (1 - \sin \varepsilon).$$

It remains to apply Tongue Lemma 4.2. \square

10.2. Claim. *Assume γ lies on the dark side for i . Then for any pair of indexes $j > i$, such that*

$$\left| \sum_{n=i}^j s_n \right| > 5$$

we have

$$\varphi_j > \frac{3}{2} \cdot \varphi_i.$$

Proof. By Claim 7.3, we may assume that

$$\sum_{n=i}^j s_n = 6$$

Let j' be the least index such that

$$\left| \sum_{n=i}^{j'} s_n \right| = 5.$$

Note that for any $b > t_j$ there is $a \in [t_i, t_j]$ such that interval $[a, b]$ satisfies the assumptions of Proposition 8.4. In particular $\psi(b) > \varphi_i$ for any $b > t_j$. Applying Claim 10.1, we get that $|\vartheta_j| > \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_i$ or $|\vartheta_{j'}| > \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_i$. By Claim 7.3, φ_n is non-decreasing, and $\varphi_n \geq |\vartheta_n|$ for any n , in both cases we get

$$\varphi_j > \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_i.$$

Hence the result follows. \square

10.3. Proposition. *If γ is an i -drifting minimizing geodesic on the dark side for i then*

$$\text{TotCurv}_j \gamma \leq 100 \cdot \pi.$$

Proof. We can assume that γ cross the j -horizon ω_j transversely. Let $t_0 < \dots < t_k$ be the meeting moments of γ with ω_j and s_0, \dots, s_k the signs.

Recall that S_q denotes the subset of indexes $\{1, \dots, k\}$ which appear in s -pair with depth q . According to Corollary 9.2,

$$\left| \sum_{n \in S_q} s_n \cdot \vartheta_n \right| \leq 4 \cdot q \cdot \pi.$$

In particular,

$$\left| \sum_{n \in S_1 \cup \dots \cup S_5} s_n \cdot \vartheta_n \right| \leq 40 \cdot \pi.$$

Set $R = \{1, \dots, k\} \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_5)$; this is the set of indexes which appear in s -pairs with depth at least 6 as well as those which do not appear in any s -pair.

According to Claim 7.2,

$$\left| \sum_{n \in R} s_n \cdot \vartheta_n \right| \leq \sum_{n \in R} |\vartheta_n| \leq \sum_{n \in R} \varphi_n.$$

To estimate the last sum will use the results in Section 10. First let us subdivide R into 5 subsets R_1, \dots, R_5 , by setting $n \in R_m$ if $m \equiv n \pmod{5}$.

Given $n \in R_m$, denote by n' the least index in R_m which is larger n ; n' is defined for any $n \in R_m$ except the largest one. According to Claim 10.2, $\varphi_{n'} > \frac{3}{2} \cdot \varphi_n$; that is, the sequence $(\varphi_n)_{n \in R_m}$ grows faster than the geometric progression with coefficient $\frac{3}{2}$. Since φ_n is non-decreasing in n , we get

$$\sum_{n \in R_m} \varphi_n < 3 \cdot \varphi_k.$$

It follows that

$$\sum_{n \in R} \varphi_n < 15 \cdot \varphi_k \leq \frac{15}{2} \cdot \pi.$$

By Corollary 4.1,

$$\begin{aligned} \text{TotCurv}_j \gamma &\leq 2 \cdot \pi + 2 \cdot [\alpha_0 - \alpha_1 + \dots + (-1)^k \cdot \alpha_k] < \\ &< 100 \cdot \pi. \end{aligned}$$

□

11 Assembling of the proof

Assume $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ is a minimizing geodesic in a convex surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

According to propositions 2.1 and 2.2 we can assume that Σ is closed, strongly convex and smooth and the geodesic γ has finite length.

According to Proposition 6.1, we can pass to an i -drifting arc γ' of γ for some (x, y, z) -coordinate system such that

$$\text{TotCurv} \gamma' > \frac{1}{100^{100}} \cdot \text{TotCurv} \gamma. \quad \bullet$$

We will use the notations in Section 7 for γ' .

Rotating (y, z) -coordinate plane we can ensure that

$$\text{TotCurv} \gamma' \leq 10 \cdot \text{TotCurv}_j \gamma'$$

and that γ' cross the horizon ω_j transversally.

By Corollary 8.3, we can subdivide γ' into at most three arcs:

- ◊ *Left arc* γ'_- which lies on the bright side for i ,
- ◊ *Middle arc* γ'_0 which rotates around x -axis at most 4 times.
- ◊ *Right arc* γ'_+ which lies on the dark side for i .

Indeed, choose an arc $\gamma'|_{[a, b]}$ on the right from the (y, z) -plane through $\frac{1}{2} \cdot (\gamma'(0) + \gamma'(\ell))$ which rotates around x -axis 2 times and assume that b takes the minimal possible value. Note that if $\gamma'(s)$ lies on (y, z) -plane through $\frac{1}{2} \cdot (\gamma'(0) + \gamma'(\ell))$ then $[s, b] \supset [a, b]$ and any sub-arc of $[s, b]$ rotates around x -axis at most 2 times.

By Corollary 8.3, we can take $\gamma'_+ = \gamma'|_{[b,\ell]}$; in case if there is no such arc $[a,b]$, we assume that γ'_+ is not presented. Repeat the construction reverting the direction of x -axis; we get the left arc γ'_- . The remaining arc is assumed to be γ'_0 ; note that any sub-arc of γ'_0 is divided by the (y,z) -plane through $\frac{1}{2} \cdot (\gamma'(0) + \gamma'(\ell))$ into two each of which rotate around x -axis at most 2 times. Therefore the number of rotations of any arc in γ'_0 is at most 4.

Let us estimate the total curvature of γ'_- , γ'_0 and γ'_+ separately.

By Proposition 10.3, we get

$$\text{TotCurv}_j \gamma'_+ \leq 100 \cdot \pi. \quad \textcircled{2}$$

Similarly

$$\text{TotCurv}_j \gamma'_- \leq 100 \cdot \pi. \quad \textcircled{3}$$

By Corollary 9.3,

$$\text{TotCurv}_j \gamma'_0 \leq 100 \cdot \pi. \quad \textcircled{4}$$

Together with $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ and $\textcircled{4}$ the latter implies that

$$\text{TotCurv}_j \gamma' \leq 300 \cdot \pi.$$

From $\textcircled{1}$ the result follows. \square

12 Final remarks

Note that our main theorem does not hold if one removes word *minimizing* from its formulation, even if the length of geodesic is bounded by the intrinsic diameter of the surface.

In addition to Corollary 5.2, we know couple of properties of the minimizing geodesics which distinguish them in the class of all geodesics on a convex surfaces. We want to mention them although they did not help us in the proof. The first of these properties was essentially discovered by Anatolii Milka in [13]. To keep things simpler, we give a formulation only in the smooth case.

12.1. Stretching lemma. *Let $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ be a unit-speed minimizing geodesic from p to q on smooth convex hypersurface $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$ and $p_t = \gamma(t) - \dot{\gamma}(t) \cdot t$. Then for any $t \in [0, \ell]$, the point q lies on the dark side from p_t .*

12.2. Convex hat lemma. *Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$ be a closed convex hypersurface and Π be a hyperplane which cuts Σ into two parts Σ_1 and Σ_2 . Assume that the reflection of Σ_1 in Π lies inside Σ . Then Σ_1 forms a convex set in Σ ; that is, any minimizing geodesic in Σ with the ends in Σ_1 lies completely in Σ_1 .*

The proofs of both statements can be found in [14].

It is ashamed to confess, but we were not able to generalize the main theorem to higher dimensions. Namely we can not give an answer to the following question.

12.3. Open question. *Is it true that for any positive integer m , there is a constant C_m such that the total curvature of arbitrary minimizing geodesic on a convex hypersurface in \mathbb{R}^m does not exceed C_m ?*

References

- [1] Agarwal, P. K.; Har-Peled, S.; Sharir, M.; Varadarajan, K. R., “Approximating shortest paths on a convex polytope in three dimensions”. *J. ACM* 44.4 (1997), pp. 567–584.
- [2] Pach, J., “Folding and turning along geodesics in a convex surface”, *Combinatorics* 7.2 (1997) pp. 61–65.
- [3] Bárány, I.; Kuperberg, K.; Zamfirescu, T., “Total curvature and spiralling shortest paths”. *Discrete Comput. Geom.* 30.2 (2003), pp. 167–176.
- [4] Либерман И. М., «Геодезические линии на выпуклых поверхностях», *ДАН СССР* 32.5 (1941), с. 310–313.
- [5] Усов, В. В. «О длине сферического изображения геодезической на выпуклой поверхности». *Сибирский математический журнал* 17.1 (1976), с. 233–236.
- [6] Berg, I. D. "An estimate on the total curvature of a geodesic in Euclidean 3-space-with-boundary." *Geometriae Dedicata* 13.1 (1982), pp. 1–6.
- [7] Погорелов, А. В., *Внешняя геометрия выпуклых поверхностей*. 1969.
- [8] Залгаллер, В. А. «Вопрос о сферическом изображении кратчайшей». *Укр. геометрический сб.* 10 (1971) с. 12–18.
- [9] Милка, А. Д. «Кратчайшая с непрямым сферическим изображением». *Укр. геометрический сб.* 16 (1974) с. 35–52.
- [10] Усов, В. В. «О пространственном повороте кривых на выпуклых поверхностях». *Сибирский математический журнал* 17.6 (1976), с. 1427–1430.
- [11] Милка, А. Д. «Аналог теоремы Либермана в римановом пространстве». *Украинский геометрический сборник*, 24 (1981), с. 82–84.
- [12] Petrunin, A. “Applications of quasigeodesics and gradient curves”. *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* 30 (1997), pp. 203–219
- [13] Милка, А. Д. «Кратчайшие линии на выпуклых поверхностях». Докл. АН СССР, 1979, 248, №1, 34–36
- [14] Petrunin, A. “Exercises in Orthodox Geometry”. [arXiv:0906.0290](https://arxiv.org/abs/0906.0290) [math.HO]

Nina Lebedeva,
MATH. DEPT. ST. PETERSBURG STATE UNIVERSITY, UNIVERSITETSKY PR., 28, STARY
PETERHOF, 198504, RUSSIA.
STEKLOV INSTITUTE, 27 FONTANKA, ST. PETERSBURG, 191023, RUSSIA.
Email: lebed@pdmi.ras.ru

Anton Petrunin,
MATH. DEPT. PSU, UNIVERSITY PARK, PA 16802, USA
Email: petrunin@math.psu.edu

О вариации поворота кратчайших на выпуклых поверхностях

Нина Лебедева и Антон Петрунин

Аннотация

Показано, что вариация поворота кратчайших на выпуклой поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве не превосходит некоторой константы.

1 Введение

Эта заметка отвечает на вопрос заданный нам Дмитрием Бураго и этот же вопрос мы нашли позднее в [1], [2] и [3].

1.1. Основная теорема. *Вариация поворота кратчайшей на выпуклой поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 не превосходит 1000^{1000} .*

Значение $2\cdot\pi$ даёт точную оценку для аналогичной задачи на плоскости. Есть примеры кратчайших на выпуклой поверхности в \mathbb{R}^3 с вариацией поворота строго больше $2\cdot\pi$ и предположительно, точная оценка только немного превосходит $2\cdot\pi$. Такой пример был построен Барань, Куперберг и Замфиреску в [3]. Вот ещё несколько связанных результатов.

- ♦ В [4], Либерман даёт оценку на вариацию поворота короткой геодезической на поверхности компактного тела K через отношение диаметра K и радиуса вписанного в K шара. Его доказательство использует аналог леммы 3.1 ниже.
- ♦ В [5], Усов даёт точную оценку на вариацию поворота геодезической на графике ℓ -липшицевой выпуклой функции. А именно, он доказывает, что если $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ является ℓ -липшицевой и выпуклой тогда любая геодезическая на графике

$$\Gamma_f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y) \}$$

имеет вариацию поворота не больше $2\cdot\ell$. Забавное обобщение этого результата дано Бергом в [6].

- ♦ В [7], Погорелов сформулировал гипотезу о том, что сферический образ геодезической на выпуклой поверхности обязан быть (локально) спрямляемым. Легко видеть, что длина сферического образа геодезической не может быть меньше её вариации поворота. Таким образом, эта гипотеза может рассматриваться как усиление теоремы Либермана сформулированной выше. Контрпримеры к различным вариантам

Работа выполнена при финансовой поддержке первого из авторов фондом РФФИ грант 14-01-00062, второго фондом NSF, грант DMS 1309340.

этой гипотезы были получены Залгаллером в [8], Милкой в [9] и Усовым в [10]. Часть этих результатов была переоткрыта Пахом в [2].

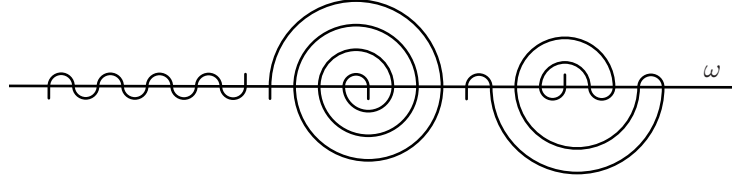
- ◊ В [3], Барань, Куперберг и Замфиреску построили винтовую кратчайшую на выпуклой поверхности; то есть кратчайшую, которая обходит вокруг данной прямой произвольно большое число раз. Ими были также переоткрыты результаты Либермана и Усова упомянутые выше.

Идея доказательства. Задача сводится к случаю, когда кратчайшая γ идёт приблизительно в одном направлении, скажем γ параметризована длиной и $\dot{\gamma}(t) \approx \dot{i}$.

В этом случае, для оценки вариации поворота достаточно оценить интеграл

$$\int \langle \ddot{\gamma}(t), \dot{j} \rangle \cdot dt$$

для вектора $\dot{j} \perp \dot{i}$. Представьте, что поверхность освещена в направлении вектора \dot{j} и, таким образом, некоторая кривая ω разделяет её на тёмную сторону и светлую. На рисунке изображены несколько комбинаторных вариантов, как γ может встречаться с ω .



В первом случае вариация поворота оценивается через интеграл Гауссовой кривизны регионов заключённых между γ и ω . Эта оценка следует из леммы о языке 4.2, которая является основным моментом доказательства.

Второй случай может показаться невозможным, однако именно так ведёт себя винтовая кратчайшая построенная в [3]. В этом случае мы считаем вариацию поворота для каждого оборота кратчайшей и доказываем, что полученная последовательность чисел растёт быстрее чем геометрически от некоторого места в середине к обоим концам. Оценка следует поскольку вариация поворота последних оборотов не превосходит $2 \cdot \pi$.

Последний случай может рассматриваться как смесь первых двух и его доказательство проводится смешанной техникой.

2 Предварительные сведения

Вариация поворота. *Вариация поворота*, $\text{TotCurv } \gamma$, кривой $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$ определяется как точная верхняя грань сумм внешних углов ломанных вписанных в γ .

Заметим, что вариация поворота ломанной σ равна сумме её внешних углов.

Если γ гладкая кривая параметризованная длиной, то

$$\text{TotCurv } \gamma = \int_0^\ell \kappa(t) \cdot dt,$$

где $\kappa(t) = |\ddot{\gamma}(t)|$ обозначает кривизну γ в момент t .

2.1. Предложение. *Предположим $\gamma_n: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ есть последовательность кривых, сходящаяся поточечно к кривой $\gamma_\infty: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Тогда*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{TotCurv } \gamma_n \geq \text{TotCurv } \gamma_\infty.$$

Доказательство. Выберем ломанную σ_∞ вписанную в γ_∞ . Пусть $\gamma_\infty(t_0), \dots, \gamma_\infty(t_k)$ её вершины в порядке появления на γ_∞ . Рассмотрим ломанную σ_n вписанную в γ_n с вершинами $\gamma_n(t_0), \dots, \gamma_n(t_k)$. Заметим, что

$$\text{TotCurv } \sigma_n \rightarrow \text{TotCurv } \sigma_\infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

По определению вариации поворота,

$$\text{TotCurv } \sigma_n \leq \text{TotCurv } \gamma_n.$$

Предложение следует, поскольку ломаная σ_∞ может быть выбрана так, что $\text{TotCurv } \sigma_\infty$ произвольно близко к $\text{TotCurv } \gamma_\infty$. \square

Сходимость множеств. Для замкнутого множества $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, обозначим через dist_Σ функцию расстояния до Σ , то есть

$$\text{dist}_\Sigma x = \inf \{ |x - y| \mid y \in \Sigma \}.$$

Последовательность $\Sigma_n \subset \mathbb{R}^3$ замкнутых множеств *сходится* к замкнутому множеству $\Sigma_\infty \subset \mathbb{R}^3$ если $\text{dist}_{\Sigma_n} x \rightarrow \text{dist}_{\Sigma_\infty} x$ для любого $x \in \mathbb{R}^3$ при $n \rightarrow \infty$.

Выпуклые поверхности. *Выпуклая поверхность* Σ в трёхмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 определяется как граница замкнутого выпуклого множества K с непустой внутренностью. Если K компактно, мы говорим, что Σ *замкнутая*.

Предположим Σ гладкая. Если в любой точке Σ её главные кривизны положительны, то Σ называется *сильно выпуклой*.

2.2. Предложение. *Пусть Σ_n есть последовательность выпуклых поверхностей, сходящихся к выпуклой поверхности Σ_∞ . Тогда для любой кратчайшей γ_∞ на Σ_∞ существует последовательность кратчайших γ_n на Σ_n , сходящаяся поточечно к γ_∞ при $n \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Предположим кратчайшая $\gamma_\infty: [0, \ell] \rightarrow \Sigma_\infty$ параметризована длиной.

Выберем интервал $[a, b] \subset (0, \ell)$. Пусть $p_\infty = \gamma_\infty(a)$ и $q_\infty = \gamma_\infty(b)$. Выберем две последовательности точек $p_n, q_n \in \Sigma_n$, сходящихся к p_∞ и q_∞ соответственно.

Обозначим через γ_n кратчайшую между p_n и q_n на Σ_n . Заметим, что γ_n сходится к дуге $\gamma_\infty|_{[a, b]}$ при $n \rightarrow \infty$.

Выбирая интервал $[a, b]$ ближе и ближе к $[0, \ell]$ и переходя к диагональной подпоследовательности кратчайших получаем требуемое утверждение. \square

3 Лемма Либбермана

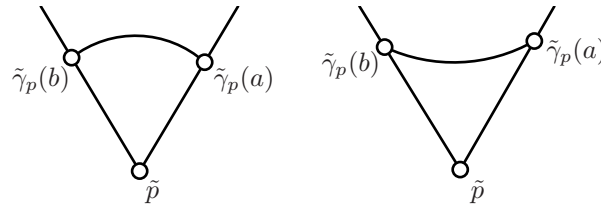
В этом разделе мы дадим небольшое обобщение конструкции Либбермана из [4]; см. также [11] и [12].

Развёртка. Пусть $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$ есть кривая параметризованная длиной и точка p не лежит на γ .

Предположим $\tilde{\gamma}_p: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ есть плоская кривая параметризованная длиной и для некоторой точки \tilde{p} на плоскости выполняется

$$|\tilde{p} - \tilde{\gamma}(t)| = |p - \gamma(t)|$$

для всех $t \in [0, \ell]$. Более того, направление из \tilde{p} в $\tilde{\gamma}(t)$ монотонно крутится (по часовой или против часовой стрелке). Тогда $\tilde{\gamma}_p$ называется *развёрткой* γ относительно p .



Выпуклая развёртка.

Вогнутая развёртка.

Развёртка $\tilde{\gamma}_p$ называется *выпуклой* (*вогнутой*) на интервале $[a, b]$ если дуга $\tilde{\gamma}_p|_{[a, b]}$ отсекает от угла $\angle \tilde{p}_{\tilde{\gamma}_p(a)}^{\tilde{\gamma}_p(b)}$ выпуклую ограниченную (соответственно неограниченную) область.

Мы говорим, что $\tilde{\gamma}_p$ *локально* выпуклая (вогнутая) на интервале $[a, b]$ если любая точка $x \in [a, b]$ допускает замкнутую окрестность $[a', b']$ в $[a, b]$ такую, что $\tilde{\gamma}_p$ выпукла (соответственно вогнута) на интервале $[a', b']$.

Перейдя к пределу приведённой конструкции при p убегающем вдоль луча в направлении единичного вектора $(-\mathbf{u})$, мы получим предельную плоскую кривую называемую развёрткой γ в направлении \mathbf{u} , она будет обозначаться $\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}$.

Развёртка $\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}$ также определяется следующими свойствами (1) развёртка $\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ параметризована длиной, (2) для некого единичного вектора $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$ равенство

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}(t) \rangle = \langle \mathbf{u}, \gamma(t) \rangle$$

выполняется при всех $t \in [0, \ell]$ и (3) проекция $\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}(t)$ на прямую перпендикулярную к $\tilde{\mathbf{u}}$ монотонна по t .

Без ущерба для общности, можно предположить, что $\tilde{\mathbf{u}}$ является вертикальным вектором координатной плоскости. В этом случае $\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}$ выпукла (вогнута) на интервале $[a, b]$ если двуугольник ограниченный дугой $\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}|_{[a, b]}$ и отрезком $[\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}(a), \tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}(b)]$ выпуклый и лежит выше (соответственно ниже) отрезка $[\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}(a), \tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}(b)]$.

Тёмная и светлая стороны. Пусть $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ выпуклая поверхность, $p \in \Sigma$ и $z \neq p$.

Точка p лежит на *тёмной* (*светлой*) стороне Σ от z если ни одна из точек $p + t \cdot (p - z)$ не лежит внутри Σ при $t > 0$ (соответственно при $t < 0$).

Пересечение тёмной стороны со светлой называется горизонтом точки z и обозначается ω_z .

Заметим, что если z лежит внутри Σ , то все точки Σ лежат на тёмной стороне от z и горизонт ω_z пуст.

Если Σ гладкая, мы можем определить внешнюю нормаль ν_p к Σ в p . В этом случае p лежит на тёмной (светлой) стороне Σ от z тогда и только тогда, когда $\langle p - z, \nu_p \rangle \geq 0$ (соответственно $\langle p - z, \nu_p \rangle \leq 0$). Если дополнительно Σ замкнута и сильно выпукла, тогда горизонт любой точки вне Σ образует гладкую замкнутую кривую на Σ .

Так же мы определяем светлую/тёмную сторону и горизонт в предельном случае, когда p убегает по лучу в направлении $(-\mathbf{u})$.

Последнее можно также определить напрямую следующим образом. Точка $p \in \Sigma$ лежит на тёмной (светлой) стороне для вектора \mathbf{u} , если ни одна из точек $p + \mathbf{u} \cdot t$ не лежит внутри Σ при $t > 0$, (соответственно $t < 0$). Так же, как и раньше, пересечение светлой стороны с тёмной называется *горизонтом* для \mathbf{u} и обозначается через $\omega_{\mathbf{u}}$.

Значит, эти условия можно записать как $\langle \nu_p, \mathbf{u} \rangle \geq 0$, и $\langle \nu_p, \mathbf{u} \rangle \leq 0$ в гладком случае. Если Σ ещё и замкнута и сильно выпукла, то $\omega_{\mathbf{u}}$ является замкнутой гладкой кривой.

3.1. Лемма Либерамна. Пусть γ есть геодезическая на выпуклой поверхности $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Тогда для любой точки $z \notin \Sigma$ развёртка $\tilde{\gamma}_z$ локально выпукла (локально вогнута), если γ лежит на тёмной (соответственно на светлой) стороне Σ от z .

Аналогично для единичного вектора \mathbf{u} , развёртка $\tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}$ локально выпукла (локально вогнута), если γ лежит на тёмной (соответственно на светлой) стороне Σ для \mathbf{u} .

Заметим, что для любой пространственной кривой γ , неравенство

$$\text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{u}} \leq \text{TotCurv } \gamma.$$

выполняется для любого единичного вектора \mathbf{u} . С другой стороны, вариации поворотов нескольких развёрток дают оценку на вариацию поворота изначальной кривой. Например, если $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ортонормированный базис, тогда

$$\text{TotCurv } \gamma \leq \text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{i}} + \text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{j}} + \text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{k}}.$$

Если γ лежит полностью на тёмной (или светлой) стороне для направления \mathbf{u} , тогда по лемме Либерамана получаем

$$\text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{u}} \leq \pi.$$

Отсюда следует, что если γ пересекает горизонты $\omega_{\mathbf{i}}$, $\omega_{\mathbf{j}}$ и $\omega_{\mathbf{k}}$ не более чем N раз, тогда

$$\begin{aligned} \text{TotCurv } \gamma &\leq \text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{i}} + \text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{j}} + \text{TotCurv } \tilde{\gamma}_{\mathbf{k}} \leq \\ &\leq (N + 1) \cdot \pi. \end{aligned}$$

Значит, если бы Основная Теорема не выполнялась для кратчайшей γ , то она должна была бы пересечь горизонты $\omega_{\mathbf{i}}$, $\omega_{\mathbf{j}}$ и $\omega_{\mathbf{k}}$ огромное число раз.

4 Кривизна развёртки

Пусть $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ геодезическая, параметризованная длиной на замкнутой гладкой сильно выпуклой поверхности $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Предположим, что для некоторого единичного вектора \mathbf{u} , геодезическая γ трансверсально проходит сквозь горизонт $\omega_{\mathbf{u}}$ в моменты времени $t_0 < \dots < t_k$. Определим $\alpha_i = \angle(\dot{\gamma}(t_i), \mathbf{u}) - \frac{\pi}{2}$ для каждого i . Заметим, что $|\alpha_i| \leq \frac{\pi}{2}$.

Значения t_i и α_i будут называться соответственно *моментами встреч* и *углами встреч* геодезической γ с горизонтом $\omega_{\mathbf{u}}$.

Введём новое обозначение

$$\text{TotCurv}_{\mathbf{u}} \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \text{TotCurv} \tilde{\gamma}_{\mathbf{u}}.$$

Из леммы Либмана 3.1 получаем следующее.

4.1. Следствие. Пусть $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ гладкая сильно выпуклая поверхность, $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ геодезическая, параметризованная длиной, и \mathbf{u} единичный вектор. Предположим, что γ трансверсально пересекает горизонт $\omega_{\mathbf{u}}$, а $t_0 < \dots < t_k$ и $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ их моменты и углы встреч. Тогда

$$\text{TotCurv}_{\mathbf{u}} \gamma \leq 3 \cdot \pi + 2 \cdot |\alpha_0 - \alpha_1 + \dots + (-1)^k \cdot \alpha_k|.$$

Далее, для получения верхней оценки на вариацию поворота, мы получим оценку на сумму

$$|\alpha_0 - \alpha_1 + \dots + (-1)^k \cdot \alpha_k|.$$

Нахождение такой оценки является основным моментом доказательства.

Доказательство. По лемме Либмана,

$$\text{TotCurv}_{\mathbf{u}}(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}) = \pm(\alpha_{i-1} - \alpha_i),$$

здесь знак «+» если $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ лежит на тёмной стороне для \mathbf{u} и «−» если на светлой. Суммируя, получаем

$$\text{TotCurv}_{\mathbf{u}}(\gamma|_{[t_0, t_k]}) = |\alpha_0 - 2 \cdot \alpha_1 + \dots + (-1)^{k-1} \cdot 2 \cdot \alpha_{k-1} + (-1)^k \cdot \alpha_k|.$$

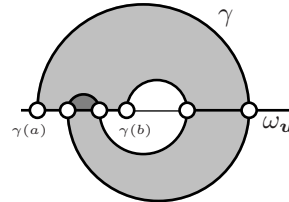
По лемме Либмана,

$$\text{TotCurv}_{\mathbf{u}}(\gamma|_{[0, t_0]}), \text{TotCurv}_{\mathbf{u}}(\gamma|_{[t_k, \ell]}) \leq \pi$$

Поскольку $\alpha_0, \alpha_k \leq \frac{\pi}{2}$, утверждение следует. \square

Обозначим через K_p Гауссову кривизну поверхности Σ в её точке p .

Предположим $a < b$ моменты встреч кратчайшей γ с $\omega_{\mathbf{u}}$. Дуга $\gamma|_{[a, b]}$ будет называться $\omega_{\mathbf{u}}$ -языком, если существует погруженный диск $\iota: \mathbb{D} \hookrightarrow \Sigma$ такой, что замкнутая кривая $\iota|_{\partial \mathbb{D}}$ образована дугами $\gamma|_{[a, b]}$ и $\omega_{\mathbf{u}}$. В этом случае погружение ι называется *диск языка*.



4.2. Лемма о языке. Пусть \mathbf{u} единичный вектор, $\gamma: [a, b] \rightarrow \Sigma$ кратчайшая, а также $\omega_{\mathbf{u}}$ -язык с диском $\iota: \mathbb{D} \hookrightarrow \Sigma$ на сильно выпуклой поверхности $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

Тогда

$$\int_{\mathbb{D}} K_{\iota(x)} \cdot d_{\iota(x)} \text{area}_{\Sigma}$$

принимает одно из значений

$$\alpha - \beta, -\alpha + \beta, \pi - \alpha - \beta, \pi + \alpha + \beta \pmod{2\pi}.$$

В частности

$$|\alpha - \beta| \leq \int_{\mathbb{D}} K_{\iota(x)} \cdot d_{\iota(x)} \text{area}_{\Sigma}. \quad \textcircled{1}$$

Если дополнительно потребовать, что образ $\iota(\mathbb{D})$ полностью лежит на тёмной стороне для \mathbf{u} , тогда

$$\text{TotCurv } \gamma \leq \int_{\iota(\mathbb{D})} K_p \cdot d_p \text{area}_{\Sigma}. \quad \textcircled{2}$$

Доказательство. Поскольку γ геодезическая, параллельный перенос вдоль γ переводит $\dot{\gamma}(a)$ в $\dot{\gamma}(b)$.

Заметим также, что \mathbf{u} лежит в касательной плоскости Σ в любой точке горизонта $\omega_{\mathbf{u}}$. В частности \mathbf{u} образует параллельное поле на $\omega_{\mathbf{u}}$.

Отсюда следует что параллельное перенесение вокруг $\iota|_{\partial\mathbb{D}}$ поворачивает касательную плоскость на угол

$$\pm(\frac{\pi}{2} + \alpha) \pm (\frac{\pi}{2} + \beta)$$

Для доказательства основного утверждения леммы остаётся применить формулу Гаусса — Бонне.

Обозначим через R правую часть $\textcircled{1}$. Заметим, что $R \geq 0$ и $|\alpha|, |\beta| \leq \frac{\pi}{2}$. Из основного утверждения леммы следует, что

$$R \geq |\alpha - \beta|.$$

Для доказательства $\textcircled{2}$, заметим, что в этом случае ι является вложением. Далее заметим, что сферический образ тёмной стороны Σ образует полусферу. Таким образом 2π есть интеграл Гауссовой кривизны по всей тёмной стороне. Отсюда

$$\int_{\mathbb{D}} K_{\iota(x)} \cdot d_{\iota(x)} \text{area}_{\Sigma} = \int_{\iota(\mathbb{D})} K_p \cdot d_p \text{area}_{\Sigma} < 2\pi.$$

Применение леммы Либермана завершает доказательство. \square

5 Почти прямые кривые

Пусть $\varepsilon > 0$. Кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется ε -прямой если

$$(1 - \varepsilon) \cdot \text{length } \gamma \leq |\gamma(b) - \gamma(a)|.$$

5.1. Лемма. Пусть $\varepsilon > 0$ и n положительное целое такое, что $n \cdot \varepsilon > 2$. Тогда любую кратчайшую на выпуклой поверхности Σ в \mathbb{R}^3 можно разбить на ε -прямые дуги $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

Доказательство. Пусть $\vartheta \in (0, \pi)$ есть число определённое равенством

$$1 - \cos \vartheta = \varepsilon.$$

Пусть $p, q \in \Sigma$ и ν_p и ν_q — внешние нормали к Σ в точках p и q соответственно. Заметим, что если

$$\angle(\nu_p, \nu_q) \leq 2 \cdot \vartheta,$$

то любая кратчайшая от p до q в Σ является ε -прямой.

Пусть $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ кратчайшая, параметризованная длиной.

Предположим, $\gamma_{[t, \ell]}$ не ε -прямая, тогда обозначим через t' максимальное число в $[t, \ell)$ такое, что дуга $\gamma_{[t, t']}$ является ε -прямой. Рассмотрим последовательность $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \ell$ такую, что $t_{i+1} = t'_i$ для каждого i . Обозначим через ν_i единичную внешнюю нормаль к Σ в $\gamma(t_i)$. Из вышесказанного следует, что

$$\angle(\nu_i, \nu_j) \geq 2 \cdot \vartheta$$

для всех $i \neq j$. Другими словами, открытые шары $B_\vartheta(\nu_i)$ в сфере \mathbb{S}^2 не пересекаются.

Остаётся заметить, что

$$\text{area}[B_\vartheta(\nu_i)] = 2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \quad \text{и} \quad \text{area} \mathbb{S}^2 = 4 \cdot \pi.$$

Отсюда результат. □

5.2. Следствие. Для любой кратчайшей γ длины ℓ на выпуклой поверхности Σ в \mathbb{R}^3 выполняется неравенство

$$\text{diam } \gamma \geq \frac{\ell}{10}.$$

Доказательство. Применим лемму 5.1 для $\varepsilon = \frac{1}{2}$. □

6 Дуга в почти одном направлении

6.1. Предложение. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что выполняется следующее условие.

Если $\gamma: [a, b] \rightarrow \Sigma$ кратчайшая на гладкой сильно выпуклой поверхности Σ в \mathbb{R}^3 , то существует подынтервал $[a', b'] \subset [a, b]$ такой, что

$$\text{TotCurv}(\gamma|_{[a', b']}) > \delta \cdot \text{TotCurv } \gamma.$$

и

$$\angle(\dot{\gamma}(t), \mathbf{u}) < \varepsilon$$

для некоторого единичного вектора \mathbf{u} и всех $t \in [a', b']$.

Более того, при $\varepsilon = \frac{1}{10}$ можно взять $\delta = \frac{1}{100100}$.

Предпошлём доказательству пару лемм.

6.2. Лемма. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что выполняется следующее условие.

Предположим γ есть кривая, \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 два ненулевых вектора в \mathbb{R}^3 и $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq \pi$ такие, что

$$\begin{aligned} \varepsilon &< \angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) < \pi - \varepsilon \\ \alpha_i - \delta &< \angle(\mathbf{v}_i, \dot{\gamma}(t)) < \alpha_i + \delta, \end{aligned}$$

тогда существует вектор \mathbf{u} такой, что $\angle(\mathbf{u}, \dot{\gamma}(t)) < \varepsilon$.

Более того, при $\varepsilon < \frac{1}{10}$ можно взять $\delta = \varepsilon^{10}$.

Доказательство даётся прямым вычислением и мы его опускаем.

6.3. Лемма. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что выполняется следующее условие.

Предположим $\gamma: [a, b] \rightarrow \Sigma$ является δ -прямой кратчайшей на гладкой сильно выпуклой поверхности Σ in \mathbb{R}^3 . Пусть $\mathbf{v}_\gamma = \gamma(b) - \gamma(a)$. Тогда существует подынтервал $[a', b']$ в $[a, b]$ такой, что

$$\text{TotCurv}(\gamma|_{[a', b']}) \geq \delta \cdot \text{TotCurv } \gamma.$$

и

$$\alpha - \varepsilon \leq \angle(\dot{\gamma}(t), \mathbf{v}_\gamma) \leq \alpha + \varepsilon$$

для некоторого фиксированного α и любого $t \in [a', b']$.

Более того, при $\varepsilon < \frac{1}{10}$ можно взять $\delta = \varepsilon^{10}$.

Доказательство. Без ущерба для общности, можно предположить, что $a = 0$, $b = 2$ и

$$\text{TotCurv}(\gamma|_{[1, 2]}) \geq \frac{1}{2} \cdot \text{TotCurv } \gamma.$$

Пусть $p = \gamma(0)$ и $\vartheta \in (0, \pi)$ такое, что $1 - \cos \vartheta = \delta$. Заметим, что

$$\angle(\mathbf{v}_\gamma, \gamma(t) - p) \leq \angle(\tilde{\gamma}_p(1) - \tilde{p}, \tilde{\gamma}_p(2) - \tilde{p}) < \vartheta \quad \textcircled{1}$$

для любого $t \geq 1$.

По лемме Либермана

$$\text{TotCurv}_p(\gamma|_{[1, 2]}) < \pi + \vartheta.$$

Предположим $N = \lceil \frac{\pi}{\vartheta} + 1 \rceil$. Тогда можно подразбить $\gamma|_{[1, 2]}$ на N дуг $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ таких, что

$$\text{TotCurv}_p(\gamma_n) \leq \vartheta \quad \textcircled{2}$$

для каждого n .

Из $\textcircled{1}$ и $\textcircled{2}$, следует, что для каждого n , существует угол α_n , такой что

$$\alpha_n - \vartheta \leq \angle(\dot{\gamma}_n(t), \mathbf{v}_\gamma) \leq \alpha_n + \vartheta.$$

Для доказательства основного утверждения остаётся выбрать δ так, чтобы $\vartheta(\delta) < \frac{\varepsilon}{100}$ и выбрать дугу γ_n с максимальной вариацией поворота. \square

Доказательство предложения 6.1. Положим $\gamma_0 = \gamma$.

Для $\delta > 0$, положим $n = \lceil \frac{2}{\delta} \rceil$. По лемме 5.1, геодезическую γ_0 можно подразбить на n дуг, каждая из которых δ -прямая. Выберем из них дугу γ'_0 с максимальной вариацией поворота. Предполагая $\delta < \frac{1}{10}$, получаем

$$\text{TotCurv } \gamma'_0 \geq \frac{\delta}{10} \cdot \text{TotCurv } \gamma_0.$$

Пусть α_1 есть угол и γ_1 — дуга в γ'_0 , предоставленные леммой 6.3. В частности,

$$\begin{aligned} \text{TotCurv } \gamma_1 &\geq \delta \cdot \text{TotCurv } \gamma'_0 \geq \\ &\geq \frac{\delta^2}{10} \cdot \text{TotCurv } \gamma_0. \end{aligned}$$

Если $\alpha_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (или $\alpha_1 \geq \pi - \frac{\varepsilon}{2}$) и δ достаточно мало, тогда утверждение выполняется для дуги γ_1 и вектора $\mathbf{u} = \pm \mathbf{v}_{\gamma'_0}$.

В противном случае повторим построение для γ_1 . А именно, применим лемму 5.1 к геодезической γ_1 и обозначим через γ'_1 ту δ -прямую дугу у которой максимальна вариация поворота. Если значение δ мало, мы получаем

$$\frac{\varepsilon}{3} < \angle(\mathbf{v}_{\gamma'_1}, \mathbf{v}_{\gamma'_0}) < \pi - \frac{\varepsilon}{3} \quad \textcircled{3}$$

Таким образом

$$\text{TotCurv } \gamma'_1 \geq \frac{\delta}{10} \cdot \text{TotCurv } \gamma_1 \geq \frac{\delta^3}{100} \cdot \text{TotCurv } \gamma_0.$$

Далее применим лемму 6.3 к γ'_1 . Обозначим через γ_2 и α_2 полученные угол и дугу из γ'_1 . Снова

$$\text{TotCurv } \gamma_2 \geq \frac{\delta^4}{100} \cdot \text{TotCurv } \gamma_0.$$

Кривая γ_2 бежит под почти постоянным углом к $\mathbf{v}_{\gamma'_0}$ и $\mathbf{v}_{\gamma'_1}$. Неравенство $\textcircled{3}$ позволяет применить лемму 6.2. Отсюда следует основная часть.

Последняя часть доказывается прямым вычислением. \square

7 Дрейфующие геодезические

В этом разделе мы вводим обозначения, используемые далее.

Выберем (x, y, z) -координаты в евклидовом пространстве; обозначим через $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ стандартный базис.

Плоскость параллельная, скажем (y, z) -координатной плоскости, будет называться (y, z) -плоскостью.

7.1. Определение. Гладкая кривая γ называется \mathbf{i} -дрейфующей, если оба её конца лежат на оси x и $\angle(\dot{\gamma}(t), \mathbf{i}) < \frac{1}{10}$ для любого t .

(λ, μ, ν) -репер. Пусть Σ — гладкая выпуклая поверхность и $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ — \mathbf{i} -дрейфующая кратчайшая, параметризованная длиной.

Для $t \in [0, \ell]$, рассмотрим ориентированный ортонормированный репер $\lambda(t), \mu(t), \nu(t)$ такой, что вектор $\nu(t)$ есть внешняя нормаль к Σ в $\gamma(t)$, вектор $\mu(t)$ лежит в (y, z) -плоскости и значит вектор $\lambda(t)$ лежит в плоскости параллельной $\nu(t)$ и оси x . Мы дополнительно предполагаем, что $\langle \lambda, \mathbf{i} \rangle \geq 0$.

Поскольку $\langle \dot{\gamma}(t), \mathbf{i} \rangle > 0$, имеем $\nu(t) \neq \mathbf{i}$. Значит репер (λ, μ, ν) определён однозначно для всех $t \in [0, \ell]$.

Угловые функции. Положим

$$\varphi(t) = \angle(\mathbf{i}, \dot{\gamma}(t)), \quad \psi(t) = \frac{\pi}{2} - \angle(\mathbf{i}, \nu(t)), \quad \vartheta(t) = \frac{\pi}{2} - \angle(\mu(t), \dot{\gamma}(t)).$$

Заметим, что $|\vartheta(t)|, |\psi(t)| \leq \frac{\pi}{2}$ и для любого t существует прямоугольный сферический треугольник с катетами $|\vartheta(t)|, |\psi(t)|$ и гипотенузой $\varphi(t)$. В частности $\cos \vartheta \cdot \cos \psi = \cos \varphi$. Отсюда получаем следующее.

7.2. Утверждение. Для любого t выполняются неравенства

$$\varphi(t) \geq |\psi(t)| \quad \text{и} \quad \varphi(t) \geq |\vartheta(t)|$$

Применив лемму Либермана в направлении \mathbf{i} получаем следующее.

7.3. Утверждение. Если дуга $\gamma|_{[a,b]}$ лежит на тёмной (светлой) стороне для \mathbf{i} , то угловая функция φ не убывает (соответственно не возрастает) на интервале $[a, b]$.

8 Сечения

Пусть γ — кривая на гладкой сильно выпуклой поверхности Σ в \mathbb{R}^3 . Рассмотрим плоскость L , проходящую через две точки γ , скажем $p = \gamma(a)$ и $q = \gamma(b)$, где $a < b$. Пусть L_{\pm} — полуплоскости в L ограниченные прямой, проходящей через p и q . Положим $\sigma_{\pm} = \Sigma \cap L_{\pm}$.

8.1. Наблюдение. Если γ кратчайшая на гладкой сильно выпуклой поверхности $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, и a, b, σ_{\pm} как выше, то

$$\text{length } \sigma_{\pm} \geq \text{length}(\gamma|_{[a,b]}).$$

Для доказательства достаточно заметить, что σ_+ и σ_- суть гладкие выпуклые плоские кривые, соединяющие p с q в Σ .

Из этого наблюдения мы выведем пару оценок для дрейфующих кратчайших.

Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ — кривая и ℓ — прямая, не проходящая через точки на γ . Рассмотрим непрерывную функцию $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ равную азимуту γ в цилиндрических координатах с осью ℓ . Если

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \geq 2 \cdot n \cdot \pi,$$

мы говорим, что γ обошла вокруг прямой ℓ хотя бы n раз.

8.2. Предложение. Пусть $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ есть \mathbf{i} -дрейфующая кратчайшая на выпуклой поверхности $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Предположим, для подынтервала $[a, b]$ в $[0, \ell]$ выполняются следующие условия:

- (i) точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ лежат в полуплоскости ограниченной осью x и дуга $\gamma|_{[a,b]}$ обходит вокруг оси x хотя бы раз.
- (ii) у точки $\gamma(a)$, x -координата больше чем у точки $\frac{1}{2} \cdot (\gamma(0) + \gamma(\ell))$.

Тогда $\gamma(b)$ лежит на тёмной стороне для i .

Доказательство. Применим наблюдение 8.1 к плоскости, содержащей ось x , точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$.

Можно предположить, что $\gamma(0)$ совпадает с началом координат и обе точки $p = \gamma(a)$ и $q = \gamma(b)$ лежат на (x, z) -координатной полуплоскости с $x \geq 0$, далее обозначаемой Π . Мы можем также предположить, что $\sigma_+ \subset \Pi$. Обозначим через $(x_p, 0, z_p)$ и $(x_q, 0, z_q)$ координаты p и q .

По условиям, $x_p < x_q < 2 \cdot x_p$.

Рассуждая от противного, предположим, что $\gamma(b)$ лежит на светлой стороне для i . Тогда из выпуклости кривой $\Pi \cap \Sigma$ следует, что

$$\text{length } \sigma_+ \leq \sqrt{(x_q - x_p)^2 + z_p^2}.$$

С другой стороны, поскольку $\gamma|_{[a,b]}$ обходит вокруг оси x хотя бы раз, получаем

$$\text{length } \gamma|_{[a,b]} \geq \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (z_p + z_q)^2}.$$

Эти две оценки противоречат наблюдению 8.1. \square

8.3. Следствие. Если Σ , γ , ℓ , a и b как в предложении 8.2 и дуга $\gamma|_{[a,b]}$ обходит вокруг оси x хотя бы дважды, то дуга $\gamma|_{[b,\ell]}$ лежит на тёмной стороне для i .

Доказательство. Заметим, что для любого $b' \in [b, \ell]$ существует $a' \in [a, b]$ такое, что условия Предложения 8.2 выполняются для интервала $[a', b']$. Остаётся применить это предложение. \square

8.4. Предложение. Пусть $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ есть i -дрейфующая кратчайшая на выпуклой поверхности $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Предположим, что дуга $\gamma|_{[b,\ell]}$ лежит на тёмной стороне Σ для i . Если $b \leq s < t \leq \ell$ и точка $\gamma(s)$ лежит в плоскости Π , проведённой через $\gamma(t)$ в направлении $\nu(t)$ и $\lambda(t)$, тогда

$$\varphi(s) \leq \psi(t).$$

Доказательство. Применим наблюдение 8.1 к плоскости Π , $p = \gamma(s)$ и $q = \gamma(t)$.

Пусть x_p и x_q обозначают x -координаты p и q .

Поскольку $\gamma|_{[s,t]}$ лежит на тёмной стороне, её развёртка $\tilde{\gamma}|_{[s,t]}$ по отношению к i выпуклая. В частности

$$\text{length}(\gamma|_{[s,t]}) = \text{length}(\tilde{\gamma}|_{[s,t]}) \geq \frac{x_q - x_p}{\cos \varphi(s)}.$$

С другой стороны, выпуклость σ_+ влечёт, что

$$\text{length } \sigma_+ \leq \frac{x_q - x_p}{\cos \psi(t)}.$$

Остаётся применить наблюдение 8.1. \square

9 s -пары

Пусть $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ — i -дрейфующая кратчайшая на сильно выпуклой поверхности $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

Предположим, что γ пересекает горизонт ω_j трансверсально.

Обозначим через $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ моменты встреч γ с ω_j . Положим

$$\varphi_n = \varphi(t_n) \quad \psi_n = \psi(t_n) \quad \vartheta_n = \vartheta(t_n).$$

Заметим, что $\vartheta_n = \pm \alpha_n$, то есть $s_n \cdot \vartheta_n = (-1)^m \cdot \alpha_n$ для некоторой последовательности знаков $s_i = \pm 1$. В частности

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \dots + (-1)^k \cdot \alpha_k = s_0 \cdot \vartheta_0 + s_1 \cdot \vartheta_1 + \dots + s_k \cdot \vartheta_k.$$

Если ориентация выбрана правильно, то $s_n = +1$, когда $\nu_{\gamma(t)}$ движется по часовой стрелке в \mathbb{S}^2 в момент t_n и если $s_n = -1$, тогда он движется против часовой стрелки.

Пара индексов $i < j$ образует s -пару, если

$$\sum_{n=i}^j s_n = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=i}^{j'} s_n > 0,$$

если $i < j' < j$.

Поменяв “+1” и “−1” в последовательности s на скобки “(” и “)” соответственно получаем, что (i, j) образует s -пару тогда и только тогда, когда i -ая скобка парна с j -ой скобкой.

Заметим, что каждый индекс i появляется не более чем в одной s -паре и для любой s -пары (i, j) имеем

- ◇ $s_i = 1$; то есть, i -ая скобка должна быть открывающей.
- ◇ $s_j = -1$; то есть, j -ая скобка должна быть закрывающей.

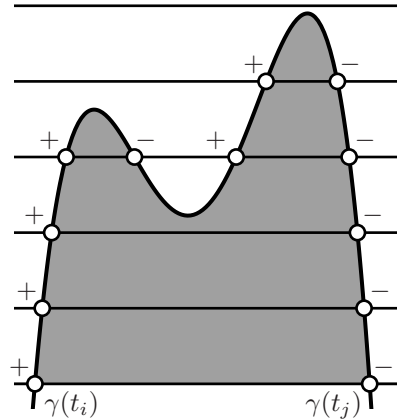
В частности, для любой s -пары (i, j) имеем

$$\begin{aligned} s_i \cdot \vartheta_i + s_j \cdot \vartheta_j &= \vartheta_i - \vartheta_j = \\ &= (-1)^i \cdot \alpha_i + (-1)^j \cdot \alpha_j. \end{aligned}$$

s -пары и ω_j -языки. Пусть (i, j) — s -пара. Заметим, что существует дуга в ω_j от $\gamma(t_i)$ к $\gamma(t_j)$ с монотонной x -координатой. Более того, существует ω_j -язык с этой дугой, включённой в граничную кривую.

Доказательство показано на рисунке. Там изображено поднятие γ в универсальное накрытие полосы в Σ между (y, z) -плоскостями через $\gamma(t_i)$ и $\gamma(t_j)$. Горизонтальные линии соответствуют поднятиям ω_j .

Положительное целое число q назовём *глубиной* s -пары (i, j) (или $q = \text{depth}_s(i, j)$), если q максимальное число для которого существует убывающая последовательность s -пар начинающаяся (i, j) . Например s -пара на рисунке имеет глубину 5.



Точнее, глубина (i, j) равна максимальному числу q для которого существует последовательность s -пар, $(i, j) = (i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_q, j_q)$ такая, что

$$i = i_1 < \dots < i_q < j_q < \dots < j_1 = j.$$

Заметим, что s -пары с одной и той же глубиной не перекрываются. То есть, если $\text{depth}(i, j) = \text{depth}(i', j')$ для различных s -пар (i, j) и (i', j') , тогда $i < j < i' < j'$ либо $i' < j' < i < j$.

Отсюда получаем следующее предложение.

9.1. Предложение. Пусть (i, j) — s -пара. Тогда дуги $\gamma|_{[t_i, t_j]}$ и некоторая дуга в ω_j ограничивают погруженный диск в Σ , лежащий между (y, z) -плоскостями через $\gamma(t_i)$ и $\gamma(t_j)$. Более того, максимальная кратность погружения не превосходит $\text{depth}_s(i, j)$.

9.2. Следствие. Обозначим через S_q подмножество индексов $\{1, \dots, k\}$ которые встречаются в s -парах глубины q . Тогда

$$\left| \sum_{n \in S_q} (-1)^n \cdot \alpha_n \right| = \left| \sum_{n \in S_q} s_n \cdot \vartheta_n \right| \leq 4 \cdot \pi \cdot q.$$

Доказательство. Для индекса n обозначим через K_n интеграл Гауссовой кривизны куска поверхности Σ с x -координатой меньше чем x -координата $\gamma(t_n)$. Заметим, что

$$0 \leq K_1 \leq \dots \leq K_k \leq 4 \cdot \pi.$$

По предложению 9.1 и лемме о языке, для s -пары (i, j) глубины q , получаем

$$s_i \cdot \vartheta_i + s_j \cdot \vartheta_j = \vartheta_i - \vartheta_j \leq q \cdot (K_j - K_i).$$

Утверждение следует, поскольку s -пары с одной и той же глубиной не перекрываются. \square

9.3. Следствие. Предположим,

$$q = \max_{1 \leq i < j \leq k} \left\{ \left| \sum_{n=i}^j s_n \right| \right\}$$

Тогда

$$\left| \sum_{n=1}^k s_n \cdot \vartheta_n \right| \leq 2 \cdot q \cdot \left(q + \frac{3}{2} \right) \cdot \pi.$$

Доказательство. Обозначим через S множество всех индексов, которые появляются в s -парах.

Заметим, что глубина s -пар не превосходит q . Таким образом

$$S = S_1 \cup \dots \cup S_q.$$

Согласно следствию 9.2,

$$\left| \sum_{n \in S} s_n \cdot \vartheta_n \right| \leq 2 \cdot q \cdot (q + 1) \cdot \pi. \quad \bullet$$

Обозначим через R множество индексов, не входящих в s -пары, то есть $R = \{1, \dots, k\} \setminus S$.

Для целого r , запишем $i \in Q_r$, если

$$\sum_{n=1}^i s_n = r.$$

Заметим, что $Q_r \neq \emptyset$ для не более чем q значений r и каждое множество Q_r содержит не более 2 индексов не из s -пар; то есть $Q_r \cap R$ содержит не более двух индексов для каждого r .

Поскольку $|a_n| < \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\left| \sum_{n \in R} s_n \cdot \vartheta_n \right| \leq q \cdot \pi.$$

Последнее неравенство вместе с **1** влечёт нужное утверждение. \square

10 Геометрический рост

10.1. Утверждение. *Предположим, $\psi(t) > \varepsilon$ для $t \in [t_i, t_{i+1}]$ и $s_i = s_{i+1}$. Тогда*

$$|\vartheta_{i+1} - \vartheta_i| > \pi \cdot \sin \varepsilon.$$

Доказательство. Заметим, что дуга $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ является языком, пусть $\iota: \mathbb{D}^2 \rightarrow \Sigma$ его диск. Поскольку $\psi(t) > \varepsilon$, сферический образ $\nu \circ \iota(\mathbb{D}^2)$ образа $\iota(\mathbb{D}^2)$ лежит в полукруге радиуса $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ в \mathbb{S}^2 . Заметим, что

$$K(\iota(\mathbb{D}^2)) = \text{area}(\nu \circ \iota(\mathbb{D}^2)) < \pi \cdot (1 - \sin \varepsilon).$$

Остаётся применить лемму о языке 4.2. \square

10.2. Утверждение. *Предположим γ лежит на тёмной стороне для i . Тогда для любой пары индексов $j > i$, таких, что*

$$\left| \sum_{n=i}^j s_n \right| > 5$$

выполняется

$$\varphi_j > \frac{3}{2} \cdot \varphi_i.$$

Доказательство. Согласно утверждению 7.3, можно предположить, что

$$\sum_{n=i}^j s_n = 6.$$

Пусть j' — последний индекс такой, что

$$\left| \sum_{n=i}^{j'} s_n \right| = 5.$$

В частности $\gamma|_{[t_i, t_{j'}]}$ обходит вокруг оси x хотябы дважды. Значит для любого $b \geq t_j$ существует значение $a \in [t_i, t_{j'}]$, такое, что $[a, b]$ удовлетворяет условиям в 8.4. В частности, $\psi(b) > \varphi_i$ для любого $b > t_j$. Применяя утверждение 10.1, получаем, что $|\vartheta_j| > \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_i$ или $|\vartheta_{j'}| > \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_i$. По утверждению 7.3, φ_n неубывающая и $\varphi_n \geq |\vartheta_n|$ для каждого n . В обоих случаях

$$\varphi_j > \frac{\pi}{2} \cdot \varphi_i.$$

Отсюда результат. \square

10.3. Предложение. *Если γ является i -дрейфующей кратчайшей на тёмной стороне для i , тогда*

$$\text{TotCurv}_j \gamma \leq 100 \cdot \pi.$$

Доказательство. Можно предположить, что γ пересекает j -горизонт ω_j трансверсально. Пусть $t_0 < \dots < t_k$ — моменты встреч γ с ω_j и s_0, \dots, s_k — знаки.

Напомним, что S_q обозначает подмножество индексов $\{1, \dots, k\}$ из s -пар с глубиной q . По следствию 9.2,

$$\left| \sum_{n \in S_q} s_n \cdot \vartheta_n \right| \leq 4 \cdot q \cdot \pi.$$

В частности,

$$\left| \sum_{n \in S_1 \cup \dots \cup S_5} s_n \cdot \vartheta_n \right| \leq 40 \cdot \pi.$$

Введём обозначение $R = \{1, \dots, k\} \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_5)$ — это множество включает индексы из s -пар с глубиной хотя бы 6, а также индексы, не входящие в s -пары.

По утверждению 7.2,

$$\left| \sum_{n \in R} s_n \cdot \vartheta_n \right| \leq \sum_{n \in R} |\vartheta_n| \leq \sum_{n \in R} \varphi_n.$$

Для оценки последней суммы воспользуемся результатами из раздела 10. Сначала подразобьём R на 5 подмножеств R_1, \dots, R_5 , полагая $n \in R_m$ если $m \equiv n \pmod{5}$.

Для $n \in R_m$ обозначим через n' следующий индекс в R_m . Значение n' определено для всех $n \in R_m$, кроме последнего. Согласно утверждению 10.2, $\varphi_{n'} > \frac{3}{2} \cdot \varphi_n$. То есть последовательность $(\varphi_n)_{n \in R_m}$ растёт быстрее чем геометрическая с коэффициентом $\frac{3}{2}$. Поскольку φ_n не убывает по n , получаем

$$\sum_{n \in R_m} \varphi_n < 3 \cdot \varphi_k.$$

Отсюда

$$\sum_{n \in R} \varphi_n < 15 \cdot \varphi_k \leq \frac{15}{2} \cdot \pi.$$

По следствию 4.1,

$$\begin{aligned} \text{TotCurv}_j \gamma &\leq 2 \cdot \pi + 2 \cdot [\alpha_0 - \alpha_1 + \dots + (-1)^k \cdot \alpha_k] < \\ &< 100 \cdot \pi. \end{aligned}$$

□

11 Сборка доказательства

Пусть $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ — кратчайшая на выпуклой поверхности $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

По предложениям 2.1 и 2.2 можно предположить, что Σ гладкая, сильно выпуклая и замкнутая, а кратчайшая γ имеет конечную длину.

Согласно предложению 6.1, можно выбрать (x, y, z) -координатную систему и перейти к i -дрейфующей дуге γ' кратчайшей γ такой, что

$$\text{TotCurv} \gamma' > \frac{1}{100^{100}} \cdot \text{TotCurv} \gamma. \quad \textcircled{1}$$

Мы будем использовать обозначения раздела 7 для γ' .

Подвернув (y, z) -координатную плоскость, можно добиться того, что

$$\text{TotCurv} \gamma' \leq 10 \cdot \text{TotCurv}_j \gamma'$$

и что γ' пересекает горизонт ω_j трансверсально.

Согласно следствию 8.3, можно подразбить γ' на три дуги:

- ◇ *Левую* γ'_- полностью лежащую на светлой стороне для i .
- ◇ *Среднюю* γ'_0 обходящую ось x не больше чем 4 раза.
- ◇ *Правую* γ'_+ полностью лежащую на тёмной стороне для i ,

Действительно, выберем дугу $\gamma'|_{[a, b]}$ справа от (y, z) -плоскости через $\frac{1}{2} \cdot (\gamma'(0) + \gamma'(\ell))$, которая делает два оборота вокруг оси x и предположим, что значение b наименьшее возможное. Заметим, что если $\gamma'(s)$ лежит на (y, z) -плоскости через $\frac{1}{2} \cdot (\gamma'(0) + \gamma'(\ell))$ тогда $[s, b] \supset [a, b]$ и любая поддуга $[s, b]$ обходит вокруг оси x не больше двух раз.

По следствию 8.3, можно взять $\gamma'_+ = \gamma'|_{[b, \ell]}$. (В случае если интервал $[a, b]$ не определён, мы предполагаем, что дуги γ'_+ нет.)

Повторив построение для обратного направления оси x , получим левую дугу γ'_- . Оставшейся кусок обозначим γ'_0 . Заметим, что дуга γ'_0 разделена (y, z) -плоскостью через $\frac{1}{2} \cdot (\gamma'(0) + \gamma'(\ell))$ на две дуги, каждая из которых обходит ось x не более двух раз. Таким образом число обходов γ'_0 не превышает 4.

Оценим вариацию поворота для каждой дуги γ'_- , γ'_0 и γ'_+ отдельно.

По предложению 10.3, получаем

$$\text{TotCurv}_j \gamma'_+ \leq 100 \cdot \pi. \quad \textcircled{2}$$

Аналогично

$$\text{TotCurv}_j \gamma'_- \leq 100 \cdot \pi. \quad \textcircled{3}$$

По следствию 9.3,

$$\text{TotCurv}_j \gamma'_0 \leq 100 \cdot \pi. \quad \textcircled{4}$$

Оценки $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ и $\textcircled{4}$ вместе дают

$$\text{TotCurv}_j \gamma' \leq 300 \cdot \pi.$$

Остаётся применить $\textcircled{1}$.

□

12 Заключительные замечания

Заметим, что основная теорема становится не верной, если в её формулировке заменить *кратчайшую* на *геодезическую*, даже если ограничить длину геодезической внутренним диаметром поверхности.

В дополнение к следствию 5.2, мы знаем пару забавных свойств кратчайших на выпуклых поверхностях, которые отличают их от геодезических. Хотя они нам не помогли в доказательстве, мы хотели бы их упомянуть. Первое из этих свойств, по сути обнаружил Анатолий Милка в [13]. Мы дадим формулировку только для гладких поверхностей, поскольку она проще.

12.1. Лемма о выпрямлении. Пусть $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \Sigma$ — кратчайшая, параметризованная длиной, от точки p до q на выпуклой гладкой гиперповерхности $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$ и $p_t = \gamma(t) - \dot{\gamma}(t) \cdot t$. Тогда, для любого $t \in [0, \ell]$, точка q лежит на тёмной стороне от p_t .

12.2. Лемма о выпуклой горбушке. Пусть $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$ — замкнутая выпуклая гиперповерхность и Π — гиперплоскость, разрезающая Σ на две части Σ_1 и Σ_2 . Предположим, что отражение Σ_1 в плоскости Π заключено внутри Σ . Тогда Σ_1 образует выпуклое множество в Σ , то есть любая кратчайшая в Σ с концами в Σ_1 полностью лежит в Σ_1 .

Доказательства обоих утверждений можно найти в [14].

Стыдно признаться, но мы не смогли обобщить основную теорему на старшие размерности, то есть мы не знаем ответ на следующий вопрос.

12.3. Открытый вопрос. Верно ли, что для любого положительного целого m , существует вещественная константа C_m , такая, что вариация поворота произвольной кратчайшей на выпуклой замкнутой гиперповерхности в \mathbb{R}^m не превосходит C_m ?

Список литературы

- [1] Agarwal, P. K.; Har-Peled, S.; Sharir, M.; Varadarajan, K. R., "Approximating shortest paths on a convex polytope in three dimensions". *J. ACM* 44.4 (1997), pp. 567–584.
- [2] Pach, J., "Folding and turning along geodesics in a convex surface", *Geombinatorics* 7.2 (1997) pp. 61–65.
- [3] Bárány, I.; Kuperberg, K.; Zamfirescu, T., "Total curvature and spiralling shortest paths". *Discrete Comput. Geom.* 30.2 (2003), pp. 167–176.
- [4] Либерман И. М., «Геодезические линии на выпуклых поверхностях», *ДАН СССР* 32.5 (1941), с. 310–313.
- [5] Усов, В. В. «О длине сферического изображения геодезической на выпуклой поверхности». *Сибирский математический журнал* 17.1 (1976), с. 233–236.
- [6] Berg, I. D. "An estimate on the total curvature of a geodesic in Euclidean 3-space-with-boundary." *Geometriae Dedicata* 13.1 (1982), pp. 1–6.
- [7] Погорелов, А. В., *Внешняя геометрия выпуклых поверхностей*. 1969.
- [8] Залгаллер, В. А. «Вопрос о сферическом изображении кратчайшей». *Укр. геометрический сб.* 10 (1971) с. 12–18.

- [9] Милка, А. Д. «Кратчайшая с непрямым сферическим изображением». *Укр. геометрический сб.* 16 (1974) с. 35—52.
- [10] Усов, В. В. «О пространственном повороте кривых на выпуклых поверхностях». *Сибирский математический журнал* 17.6 (1976), с. 1427—1430.
- [11] Милка, А. Д. «Аналог теоремы Либермана в римановом пространстве». *Украинский геометрический сборник*, 24 (1981), с. 82—84,
- [12] Petrunin, A. “Applications of quasigeodesics and gradient curves”. *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* 30 (1997), pp. 203—219
- [13] Милка, А. Д. «Кратчайшие линии на выпуклых поверхностях». Докл. АН СССР, 1979, 248, №1, 34—36
- [14] Petrunin, A. “Exercises in Orthodox Geometry”. [arXiv:0906.0290](https://arxiv.org/abs/0906.0290) [math.HO]

Нина Лебедева,
 198504, САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, СТАРЫЙ ПЕТЕРГОФ, УНИВЕРСИТЕТСКИЙ ПР., ДОМ 28.
 191023, САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, НАБ. ФОНТАНКИ, 27.
 Электронная почта: lebed@pdmi.ras.ru

Anton Petrunin,
 MATH. DEPT. PSU, UNIVERSITY PARK, PA 16802, USA
 Электронная почта: petrunin@math.psu.edu